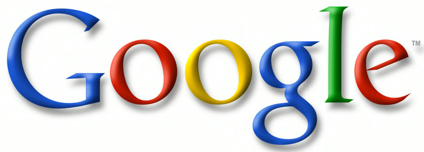


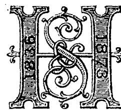
ANALYTISK

PLANGEOMETRI

af

Julius Petersen

Første Del — Anden Udgave



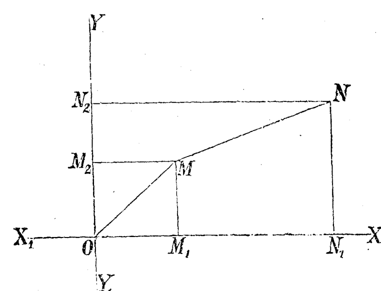
Kjøbenhavn
Andr. Fred. Høst & Søns Forlag

1884

Kjøbenhavn. I. Cohens Bogtrykkeri.

§ I. Punktet, bestemt ved retvinklede Koordinater.

1. Et Punkt i Planen er bestemt, naar man kjender dets Projektioner paa to givne, paa hinanden vinkelrette Linier. Lad disse skære hinanden i O; deres positive Retninger betegne vi ved X og Y; de negative ved X_1 og Y_1. O tages til Begyndelsespunkt for dem begge, og den positive Omløbsretning vælges saaledes, at $(XY) = \frac{\pi}{2}$. $X_1 X$ kaldes Abscisseaxen, $Y_1 Y$ Ordinataxen, med et fælles Navn Koordinataxer; O kaldes Koordinatsystemets Begyndelsespunkt.



Et Punkt M er nu, som angivet, bestemt, naar man kjender dets Projektioner M_1 og M_2, og disse bestemmes atter ved OM_1 og OM_2, der henholdsvis kaldes Punktets Abscisse og Ordinat (med et fælles Navn Koordinater) og betegnes ved x og y. Man har altsaa for Punktet M, der ogsaa betegnes (x, y),

$$x = OM_1, \quad y = OM_2.$$

Da M lettest konstrueres, ved at man afsætter OM_1 og

derpaa $M_1 M$, tages denne sidste ofte som Punktets Ordinat og regnes da positiv mod Y, negativ mod Y_1.

2. Lad M betegne den positive Retning af Linien OM og sæt $(XM) = v$; man har da, i Følge Definitionen af *cos* og *sin*, for enhver Beliggenhed af M (Trig. 9 og 10)

$$x = OM \cos v, \quad y = OM \sin v, \tag{1}$$

hvoraf

$$y = x \operatorname{tg} v; \; OM = \sqrt{x^2 + y^2} = x \sec v, \tag{2}$$

der bestemme Retningen og Længden af en Linie fra Begyndelsespunktet til et Punkt med givne Koordinater. Dog maa man mærke sig, at $\operatorname{tg} v$ kun bestemmer Liniens Beliggenhed, men ikke dens positive Retning; først naar denne er valgt, bestemmes Fortegnet for $\sec v$ og derved for Kvadratroden.

Dersom f. Ex. $x = -1$, $y = 1$, faas $\operatorname{tg} v = -1$, altsaa, naar vi kun betragte Vinkler mindre end 2π,

$$v = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases}; \quad OM = \begin{cases} +\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Linien falder i anden og fjerde Kvadrant; regnes den positiv mod anden Kvadrant, bruges de øverste, mod fjerde Kvadrant de nederste Værdier.

3. At bestemme Retningen og Længden af den Linie, der forbinder to givne Punkter $M(x_1, y_1)$ og $N(x_2, y_2)$.

Man har, idet Punkternes Projektioner ere henholdsvis M_1, M_2, N_1 og N_2 og L den positive Retning af MN, samt $(XL) = v$ (Trig. (30) og (31))

$$M_1N_1 = MN \cos (XL); \; M_2N_2 = MN \sin (XL)$$

eller

$$x_2 - x = MN \cos v; \quad y_2 - y_1 = MN \sin v,$$

hvoraf

$$\left.\begin{array}{c} tg\, v = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \\ MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = (x_2 - x_1) \sec v \end{array}\right\}. \quad (3)$$

Naar det ene Punkt er Begyndelsespunktet, komme vi tilbage til det ovenfor behandlede Tilfælde; de der gjorte Bemærkninger om Fortegnene gjælde ogsaa her.

$tg\, v$ kaldes Liniens Retningskoefficient; Retningskoefficienten for en Linie gjennem to Punkter er altsaa Ordinaternes Differens, divideret med Abscissernes Differens.

4. At finde det Punkt $P(\xi_1, \eta_1)$, der deler MN i Forholdet μ. ($PM = \mu PN$).

Projektionerne af P maa henholdsvis dele $M_1 N$ og $M_2 N_2$ i Forholdet μ. Man har derfor (Trig. (4))

$$\xi_1 = \frac{\mu x_2 - x_1}{\mu - 1}; \quad \eta_1 = \frac{\mu y_2 - y_1}{\mu - 1}. \quad (4)$$

For det med P harmonisk forbundne Punkt er Forholdet $-\mu$, saa at det bestemmes ved

$$\xi_2 = \frac{\mu x_2 + x_1}{\mu + 1}; \quad \eta_2 = \frac{\mu y_2 + y_1}{\mu + 1}. \quad (5)$$

Betingelsen for, at fire Punkter paa en ret Linie ere harmonisk beliggende, faas ved at bemærke, at deres Projektioner paa en vilkaarlig Linie ogsaa maa ligge harmonisk; den er altsaa (Trig. (5))

$$\frac{x_1 - \xi_1}{x_2 - \xi_1} = -\frac{x_1 - \xi_2}{x_2 - \xi_2} \text{ eller } \frac{y_1 - \eta_1}{y_2 - \eta_1} = -\frac{y_1 - \eta_2}{y_2 - \eta_2}. \quad (6)$$

For $\mu = -1$ faar man Midtpunktet af Linien MN bestemt ved

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \eta = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (7)$$

Som Anvendelse ville vi bestemme Skæringspunktet for Medianerne i Trekanten med Vinkelspidserne (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3). Medianen fra (x_1, y_1) gaar til Midtpunktet af den modstaaende Side, altsaa til Punktet $\left[\frac{x_2 + x_3}{2}; \frac{y_2 + y_3}{2}\right]$. Det Punkt, der deler Medianen i Forholdet — 2, faar Koordinaterne

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ og } \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

og Symmetrien af disse Udtryk viser, at dette Punkt ogsaa ligger i de to andre Medianer og deler dem i samme Forhold.

Opgaver.

1. Hvor stor er Afstanden mellem Punkterne (3,4) og (—1,3)?
2. Hvor store ere Siderne i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere (0,1), (5,6) og (6,1)?
3. Hvilke ere Sidernes Midtpunkter i Trekanten i 2?
4. Bevis, at den Linie, som forbinder Midtpunkterne af de to Sider i en Trekant, er parallel med den tredje Side og halv saa stor.
5. En Linie AB har Retningskoefficienten α; hvor stor er Længden AB, naar A og B henholdsvis have Abscisserne x_1 og x_2?
6. En ret Linie indeholder Punkterne (2,3) og (5,7); hvilken er Liniens Retningskoefficient og hvor stor er Ordinaten til det Punkt af Linien, hvis Abscisse er 4?
7. Den Linie, der forbinder Punkterne (2,3) og (5,7), er delt i 5 lige store Dele; find Delingspunkternes Koordinater, samt Retningskoefficienterne til de Linier, der forbinde Delingspunkterne med Begyndelsespunktet.
8. Naar (x, y) er et vilkaarligt Punkt af en Cirkelperiferi, der har Radius r og Centrum i Begyndelses-

punktet, hvilken Ligning maa da x og y tilfredsstille? Naar den Linie, der forbinder (x, y) med Punktet (0,0), har Retningskoefficienten 2, hvor store ere da x og y?

9. I en Linie gjennem A (0,1) og B (1,5) er C det Punkt, der har Ordinaten 4. Bestem D, naar A og B ere harmonisk forbundne med C og D.

§ 2. Kurvers Bestemmelse.

5. Et Punkt kan ogsaa bestemmes ved to Ligninger mellem x og y, idet man, ved at løse Ligningerne, finder Punktets Koordinater. Saaledes bestemme Ligningerne $y = 2x$; $y = x + 1$ Punktet (1,2). Give de to Ligninger flere Værdier af x og y, bestemme de ikke et enkelt Punkt, men et System af Punkter. Ligningerne $x^2 + y^2 = 25$, $x + y = 7$ bestemme saaledes de to Punkter (3,4) og (4,3).

Dersom man kun har én Ligning mellem x og y til at bestemme Punktet, vil Opgaven faa uendelig mange Løsninger, idet man kan tillægge den ene ubekjendte vilkaarlige Værdier og ved Ligningen bestemme de tilsvarende Værdier for den anden. Saaledes tilfredsstilles Ligningen $y = 2x$ af Punkterne (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), og i det hele taget af ethvert Punkt, hvis Ordinat er to Gange Abscissen. For ethvert af disse Punkter er $\frac{y}{x} = 2$; men i Følge (2) vil dette sige, at den Linie, der forbinder ethvert af Punkterne med Begyndelsespunktet, danner med Abscisseaxen en Vinkel, hvis *tg* er 2. Dersom man altsaa trækker en saadan Linie gjennem Begyndelsespunktet, ville Koordinaterne

til ethvert af dens Punkter og til ingen andre Punkter tilfredsstille Ligningen $y = 2x$.

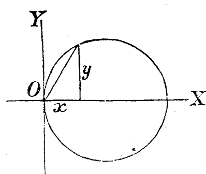
Vi finde ligeledes let hvilke Punkter, der bestemmes ved Ligningen $x^2 + y^2 = 25$. Da nemlig $\sqrt{x^2 + y^2}$ angiver Afstanden fra Begyndelsespunktet til Punktet (x, y), udtrykker Ligningen, at det søgte Punkt skal ligge i en Afstand 5 fra Begyndelsespunktet. Den ved Ligningen opstillede Betingelse opfyldes altsaa af ethvert Punkt i den Cirkel, der har O til Centrum og Radius 5, og af intet andet Punkt.

En enkelt Ligning mellem et Punkts Koordinater udtrykker saaledes blot, at Punktet ligger paa en vis Kurve; den udtrykker en Egenskab, som er fælles for alle Kurvens Punkter, og som intet andet Punkt har, og kaldes derfor Kurvens Ligning.

De undersøgte Ligninger have vist sig at være Ligninger for bekjendte Kurver. Selv meget simple Ligninger kunne imidlertid svare til Kurver, som vi ikke før have undersøgt. Saaledes kan $y^2 = x$ ikke svare til en ret Linie, da man til hver Værdi af x faar to Værdier af y; den kan heller ikke svare til en Cirkel, da den tilfredsstilles af $x = \infty$, $y = \infty$, medens Cirklen kun har Punkter i endelig Afstand. I saadanne Tilfælde tjener imidlertid selve Ligningen til Bestemmelse af Kurvens Figur, idet man ved dens Hjælp kan finde saa mange til Kurven hørende Punkter, som man vil; saaledes ligge Punkterne $(0,0)$, $(1, \pm 1)$, $(2, \pm\sqrt{2})$, $(3, \pm\sqrt{3})$ osv. alle paa Kurven $y^2 = x$, der derved ses at begynde i Begyndelsespunktet og derfra sende to, om x-Axen symmetrisk liggende, uendelige Grene ud i første og fjerde Kvadrant. Kurven er en Parabel, en Art Kurver, som vi senere skulle undersøge nærmere. Vi benytte da Kurvens Ligning til at finde dens mest karakteristiske

Egenskaber, det vil sige, at vi udlede disse af den ene bestemmende Egenskab, som Ligningen udtrykker.

Omvendt kan man benytte en given Egenskab ved en Kurve til at finde dens Ligning. Det gjælder da blot om at udtrykke Egenskaben ved Hjælp af Koordinaterne til et vilkaarligt Punkt i Kurven. Om vi end gaa ud fra forskjellige Egenskaber ved en Kurve, maa vi dog komme til den samme Ligning, thi vi have set, at to forskjellige Ligninger kun kunne tilfredsstilles af et endeligt Antal Punkter.



Vi ville f. Ex. søge Ligningen for en Cirkel, hvis Radius er r, som rører Ordinataxen og har sit Centrum i Abscisseaxen. Vi kunne da benytte den Egenskab, at Ordinaten er Mellemproportional mellem Diametrens Stykker; dette giver strax Ligningen $y^2 = x(2r - x)$.

Benytte vi den Egenskab, at Korden fra Begyndelsespunktet er Mellemproportional mellem sin Projektion paa Diametren og hele Diametren, faa vi, idet Korden til (x, y) er $\sqrt{x^2 + y^2}$, strax $x^2 + y^2 = 2rx$. Udtrykke vi endelig, at Afstanden fra et Punkt (x, y) til Centrum $(r, 0)$ er r, faa vi $\sqrt{(x - r)^2 + y^2} = r$, en Ligning, der er identisk med de to andre.

6. Vi saa, at to Ligninger mellem x og y bestemte ét eller flere Punkter, og vi se nu, at disse Punkter maa være Skæringspunkterne for de to Kurver, som Ligningerne repræsentere, naar de tages hver for sig. De tilfredsstille nemlig begge Ligningerne og maa derfor ligge paa begge Kurverne.

Man bruger undertiden forskjellige Bogstaver for

Koordinaterne til Punkterne i forskjellige Kurver og atter andre Bogstaver for Skæringspunkterne. Oftest bruges imidlertid x og y som fælles Betegnelse, og man maa da erindre, hvad de paa hvert Sted betyde. Har man f. Ex. Ligningerne

$$x^2 + y^2 = 10x; \; y = 3x,$$

da betyde x og y, naar den første Ligning tages for sig, Koordinaterne til et hvilket som helst Punkt i den ved Ligningen repræsenterede Cirkel (som har Radius 5, Centrum i x-Axen og rører y-Axen), i den anden Ligning til et hvilket som helst Punkt i den rette Linie gjennem Begyndelsespunktet ($tg\, v = 3$). Tages derimod Ligningerne sammen, saa at x og y have samme Betydning i dem begge, faar man dem kun svarende til de to Kurvers Skæringspunkter (0,0) og (1,3). Saa længe Punktet opfattes som et hvilket som helst Punkt af en Kurve, kaldes dets Koordinater løbende Koordinater.

7. Vi kunne saaledes nu opfatte Løsningen af to Ligninger med to ubekjendte geometrisk, nemlig som Bestemmelse af to Kurvers Skæringspunkter. Naar vi af to givne Ligninger danne en tredje, kommer denne til at svare til en Kurve gjennem de to andre Kurvers Skæringspunkter; Ligningen tilfredsstilles nemlig af de Værdier af x og y, der tilfredsstille begge de givne Ligninger, men disse Værdier ere netop Skæringspunkternes Koordinater. Naar man paa denne Maade erstatter de givne Ligninger ved simplere Ligninger, søger man altsaa i Virkeligheden Skæringspunkterne for Kurver, der ere lettere at behandle end de givne, og som have de samme Skæringspunkter.

Har man f. Ex. Ligningerne

$$x^2 + y^2 = 10; \; x^2 + y^2 = 10x,$$

dannes den simplere Ligning $10x = 10$, som altsaa er Ligningen for en Kurve gjennem de givne Cirklers Skæringspunkter. Da Ligningen viser, at ethvert Punkt i denne Kurve har Abscissen 1, maa Kurven være en ret Linie, parallel med Ordinataxen i Afstanden 1. Man kan nu tage denne Linie i Stedet for en af de givne Cirkler og faar da Skæringspunkterne (1,3) og (1,—3).

10. Hvilket Udseende have Kurverne $xy = 3$ og $x + y = 4$, og hvilke Punkter have de fælles?

11. Hvilket Udseende have Kurverne $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = \log x$, $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, $y^2 = 4x$, $x^2 + 4y^2 = 16$, $x^2 - 4y^2 = 16$?

§ 3. Den rette Linie.

8. Ligningen for en ret Linie, som indeholder Punktet (x_1, y_1), og som danner Vinklen v med Abscisseaxen.

Den Linie, som forbinder et vilkaarligt Punkt (x, y) i Linien med (x_1, y_1), danner med Abscisseaxen en Vinkel, hvis tg er $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ (3). Da denne Vinkel er v, har man altsaa for hvert Punkt i Linien

$$y - y_1 = tg\, v\, (x - x_1), \quad (8)$$

der er den søgte Ligning.

For $x_1 = 0$ faas Ligningen for en Linie, der afskærer Stykket y_1 af Ordinataxen, og som med Abscisseaxen danner Vinklen v,

$$y = x.\, tg\, v + y_1. \quad (9)$$

For $x_1 = y_1 = 0$ faas Ligningen for en Linie gjennem Begyndelsespunktet, og som danner Vinklen v med Abscisseaxen,

$$y = x\, tg\, v. \quad (10)$$

For $v = 0$ faas Ligningen for en Linie parallel med Abscisseaxen i Afstanden y_1

$$y = y_1. \qquad (11)$$

For $v = \frac{\pi}{2}$ faas (idet Ligningen først omskrives til $x - x_1 = cot\, v \ (y - y_1)$) Ligningen for en Linie, parallel med Ordinataxen i Afstanden x_1

$$x = x_1. \qquad (12)$$

Af disse faas atter specielt Ligningerne for Koordinataxerne

$$x = 0,\ y = 0,$$

der udtrykke, at ethvert Punkt i en af Axerne ligger i Afstanden Nul fra selve Axen.

I Stedet for (8) bruges ofte de to Ligninger

$$x = r\, cos\, v + x_1;\ y = r\, sin\, v + y_1, \qquad (13)$$

hvor r betyder Afstanden fra $(x_1,\ y_1)$ til det løbende Punkt $(x,\ y)$.

9. Ligningen for en ret Linie gjennem to Punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Man indsætter i (8) $tg v$, udtrykt ved de to Punkters Koordinater (3), og faar

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1). \qquad (14)$$

For $x_2 = y_2 = 0$ faas Ligningen for en ret Linie gjennem Begyndelsespunktet og et andet Punkt $(x_1,\ y_1)$

$$yx_1 = xy_1. \qquad (15)$$

Vælger man de to Punkter, hvert i sin Axe, nemlig $(0,\ q)$ og $(p,\ 0)$, faar man Ligningen for en ret Linie, der af Axerne afskærer Stykkerne p og q (regnede med Fortegn),

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \qquad (16)$$

10. Vi have her set, at den rette Linie repræsenteres ved en Ligning af første Grad mellem x og y. Den kan skrives med to ubestemte Koefficienter, saa længe Linien er fuldkommen ubestemt; de forskjellige Linier faas, ved at man tillægger disse forskjellige Værdier. De kaldes ofte Ligningens Konstanter, fordi de ikke forandres, saa længe man har med den samme rette Linie at gjøre, medens x og y ere variable, fordi de forandre deres Værdier, efter som man betragter forskjellige Punkter af Linien. I (16) f. Ex. forandre p og q sig ikke, saa længe man har at gjøre med den samme rette Linie, de ere for denne Linie givne Størrelser. Ere p og q ubekjendte, ved man dog, at Ligningen svarer til en ret Linie, men først, naar de blive bekjendte, ved man, hvilken ret Linie det er.

11. Omvendt svarer enhver lineær Ligning mellem x og y til en ret Linie. Den almindelige lineære Ligning har Formen

$$ax + by = c$$

og kan skrives

$$\frac{x}{\left[\frac{c}{a}\right]} + \frac{y}{\left[\frac{c}{b}\right]} = 1 \text{ eller } y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

som, ved Sammenligning med (16) og (9) vise, at Ligningen tilhører en ret Linie, der af Axerne afskærer Stykkerne $\frac{c}{a}$ og $\frac{c}{b}$, og hvis Vinkel med Abscisseaxen bestemmes ved Retningskoefficienten

$$tg\, v = -\frac{a}{b}. \tag{17}$$

Den almindelige lineære Ligning indeholder i Virkeligheden kun to Konstanter, idet den ene Koefficient

kan bortdivideres. Den rette Linie bestemmes derfor ved to Betingelser, som den skal tilfredsstille, idet disse Betingelser kunne udtrykkes ved to Ligninger, der tjene til at bestemme Konstanterne. Skal Linien f. Ex. indeholde Punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2), kunne vi til den almindelige Ligning

$$ax + by + c = 0$$

føje de to

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0,$$

der udtrykke, at de to Punkter ligge i Linien. Den søgte Ligning faas da ved Elimination af a, b og c, der giver

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

som er en anden Form for (14).

12. Skæringspunktet for to rette Linier

$$ax + by = c,$$
$$a_1x + b_1y = c_1$$

bestemmes ved at man søger x og y af de to Ligninger. De ubekjendte blive som bekjendt uendelige, naar $a : a_1 = b : b_1$, ubestemte, naar $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$. Det første Tilfælde indtræder, naar Linierne danne samme Vinkel med x-Axen (17), altsaa naar de ere parallele, det andet, naar de falde sammen.

13. Ligningen for en Linie gjennem et givet Punkt (x_1, y_1) og parallel med en given Linie $(ax + by = c)$.

Ligningen har Formen

$$y - y_1 = tg\, v(x - x_1),$$

hvor man, da de to Linier ere parallele, har (17)

$$tg\,v = -\frac{a}{b};$$

altsaa er den søgte Ligning

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

Er det givne Punkt Begyndelsespunktet, bliver Ligningen

$$ax + by = 0.$$

Opgaver.

12. Find Ligningen for en ret Linie, der danner en Vinkel paa 135° med Abscisseaxen og afskærer Stykket — 7 af Ordinataxen.
13. Hvor stor er Ordinaten til det Punkt i Linien $2x + 3y = 5$, hvis Abscisse er 2?
14. Hvilke Stykker afskærer Linien $5x + 3y = 15$ af Axerne, og hvilken Vinkel danner den med Abscisseaxen?
15. Hvilken Ligning har en Linie, der indeholder Punktet (2,3) og gaar igjennem Begyndelsespunktet?
16. Find Ligningerne for de tre Sider i Trekanten i 2.
17. I hvilket Punkt skærer Linierne i 13 og 14 hinanden?
18. Find Skæringspunktet for Linierne $5x + y = 4$ og $10x + 2y = 3$.
19. Find Ligningen for en ret Linie gjennem Punktet $(3, \frac{5}{2})$, og som i Forbindelse med Axerne danner en Trekant, hvis Areal er 15?
20. Find Ligningerne for Medianerne i Trekanten i 2.
21. Find Skæringspunktet for to af disse Medianer, og vis, at dette Punkt ligger i den tredje Median.
22. Find Ligningen for en Linie, der gaar gjennem Begyndelsespunktet og gjennem Skæringspunktet for Linierne $2x + 3y = 2$ og $y = x + 1$.
23. I en Trekant ABC trækkes Medianen BD og en Linie $BE \mathrel{\#} AC$; bevis, at en vilkaarlig Linie gjennem

D skærer Figurens Linier i fire harmonisk forbundne Punkter.

24. I en ligebenet Trekant drages fra Toppunktet en Linie AD, der med Grundlinien danner en Vinkel paa 60° og deler den i to Stykker BD og DC; bevis, at $DC + DB = DA$.

25. Vinkelspidserne af en ligesidet Trekant ere (0,0), $(a,0)$ og $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$. Find Ligningerne for Vinklernes Halveringslinier og vis, at de skære hverandre i ét Punkt.

14. Vinklen mellem to rette Linier.

Betegne vi Liniernes positive Retninger ved L og L_1, have vi

$$(LL_1) = (XL_1) - (XL), \qquad (18)$$

saa at Opgaven kun har én Løsning, naar man regner den søgte Vinkel fra en bestemt af de to Linier, og naar disses Vinkler med x-Axen ere givne. Ere Linierne derimod givne ved deres Ligninger

$$ax + by = c \text{ og } a_1x + b_1y = c_1,$$

blive deres positive Retninger ubestemte, idet man kun har (17)

$$tg\,(XL) = -\frac{a}{b},\ tg\,(XL_1) = -\frac{a_1}{b_1}, \qquad (19)$$

hvor L og L_1 lige godt kunne betegne begge Retninger, da tg ikke forandres, ved at Vinklen forøges med en halv Omdrejning.

Man faar nu, ved i (18) at tage tg paa begge Sider og indsætte Værdierne af (19),

$$tg\,(LL_1) = \frac{ab_1 - ba_1}{aa_1 + bb_1}. \qquad (20)$$

Den Vinkel, som paa denne Maade er bestemt, er altsaa den, som vi maa dreje Linien L om Skæringspunktet, for at faa den til at dække L_1. Vinklen inde-

holder, da den bestemmes ved sin tg, et ubestemt Led $p\pi$; dette stemmer med, at L atter vil dække L_1 for hver halv Omdrejning, den drejes videre.

Formlen viser, hvad vi ogsaa have set ovenfor, at Linierne ere parallele, naar $ab_1 = ba_1$, og at Betingelsen for, at de to Linier staa vinkelret paa hinanden, er

$$aa_1 + bb_1 = 0. \tag{21}$$

Dersom Ligningerne skrives under Formen

$$y = \alpha x + y_1;\ y = \alpha_1 x + y_2,$$

har man

$$a = \alpha,\ a_1 = \alpha_1,\ b = b_1 = -1,$$

altsaa

$$tg(LL_1) = \frac{\alpha_1 - \alpha}{1 + \alpha\alpha_1}, \tag{22}$$

og Betingelsen for, at Linierne ere vinkelrette paa hinanden, er da

$$\alpha\alpha_1 + 1 = 0 \text{ eller } \alpha_1 = -\frac{1}{\alpha}. \tag{23}$$

15. Ligningen for en Linie gjennem et givet Punkt $(x_1,\ y_1)$, og hvis Vinkel med en given Linie, L $(y = \alpha x + q)$, regnet fra denne, er u, har først Formen

$$y - y_1 = tg\,v\,(x - x_1),$$

men

$$v = (XL) + u,$$

altsaa

$$tg\,v = \frac{tg\,u + \alpha}{1 - \alpha\,tg\,u}.$$

Den søgte Ligning er derfor

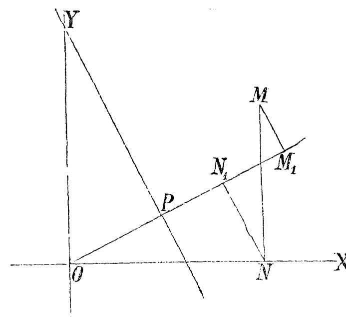
$$y - y_1 = \frac{tg\,u + \alpha}{1 - \alpha\,tg\,u}(x - x_1). \tag{24}$$

Dersom den givne Vinkel er ret, bliver Ligningen

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1), \qquad (25)$$

som faas ved (23) eller ved i (24) at sætte $tg\,u = \infty$, efter at man har divideret Tæller og Nævner i Brøken med $tg\,u$.

16. Afstanden fra en Linie til et Punkt (x_1, y_1). Fra Begyndelsespunktet fælde vi OP vinkelret paa den givne Linie. Det givne Punkt M projiceres paa x-Axen i N, M og N projiceres paa OP i M_1 og N_1. Paa OP vælge vi en positiv Retning L; man har da, idet $PO = p$, $(XL) = a$, den søgte Afstand



$$d = PM_1$$
$$= PO + ON_1 + N_1M_1,$$

men

$$PO = p,\ ON_1 = ON\ cos\,(XL) = x_1\ cos\ a,$$

$$N_1M_1 = NM\,cos\,(YL) = NM\ cos\left(-\frac{\pi}{2} + a\right) = y_1\ sin\ a,$$

altsaa

$$d = x_1\ cos\ a + y_1\ sin\ a + p. \qquad (26)$$

Afstanden er her udtrykt ved a og p, der tænkes givne. Den er Nul for Punkter i selve den givne Linie; dersom (x, y) er et vilkaarligt Punkt i denne, er altsaa

$$x\ cos\ a + y\ sin\ a + p = 0, \qquad (27)$$

der saaledes bliver en ny Form for den rette Linies Ligning, den saakaldte Normalform.

Naar man har Ligningen under denne Form, be-

høver man, for at faa Afstanden fra Linien til et Punkt, i Følge (26) blot at indsætte dette Punkts Koordinater for x og y i Ligningens venstre Side.

Forandre vi den positive Retning L, bliver α at ombytte med $\pi + \alpha$ og p med $-p$. Derved skifte alle Leddene i (27) Tegn. Normalformen er altsaa dobbelt, men Forskjellen bestaar blot i Faktoren -1. Denne faar imidlertid Betydning, naar man bestemmer Afstanden til et givet Punkt, da Fortegnet for denne Afstand beror paa den Form, Ligningen har.

Har man f. Ex. $\alpha = 30°$; $p = 5$, bliver Ligningen

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 5 = 0,$$

men den er lige saa godt

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 5 = 0,$$

svarende til $\alpha = 210°$, $p = -5$. Søger man nu f. Ex. Afstanden til Punktet $(2\sqrt{3}, 2)$, faar man, ved at bruge den første, 9, ved at bruge den anden, -9. Afstanden, der maales paa Perpendikulæren, skifter, som vi kunde forudse det, Fortegn, naar den positive Retning L forandres.

Naar vi bruge den samme Form til at bestemme flere Punkters Afstande, bliver den positive Retning uforandret, og følgelig maa alle de Punkter, hvis Afstande faa ens Fortegn, ligge paa samme Side af Linien, saa at Linien kan siges, at have en positiv og en negativ Side. Den Side, der er den positive, bestemmes da ved at man søger et bekjendt Punkts Afstand. Dertil vælges i Regelen Begyndelsespunktet; dog maa man, dersom dette ligger i den givne Linie, vælge et andet Punkt. I Exemplet ovenfor giver den første Form

Afstanden 5, den anden — 5 for Begyndelsespunktet. Et Punkt med positiv Afstand vil altsaa, naar den første Form bruges, ligge paa samme Side af Linien som Begyndelsespunktet, naar den anden Form bruges, paa den modsatte Side.

17. Den givne Formel for Afstanden forudsætter, at man har Liniens Ligning under Normalform. Det karakteristiske for denne er, at Koefficienterne til x og y ere en vis Vinkels *cos* og *sin*, altsaa, at Summen af deres Kvadrater er 1. Dette opnaas, naar Ligningen er given under en hvilken som helst Form, $ax + by + c = 0$, ved Division med $\sqrt{a^2 + b^2}$, hvorved man faar

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0, \quad (28)$$

der bliver dobbelt, idet Rodstørrelsen kan tages positiv eller negativ. α og p bestemmes da ved

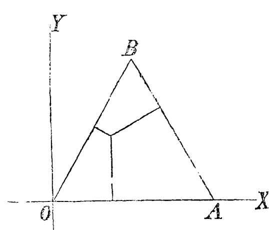
$$\cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \sin\alpha = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}};\ p = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (29)$$

Ligningen $5x + 12y = 13$ bliver saaledes, bragt paa Normalform

$$\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 1 = 0 \text{ eller } -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 1 = 0.$$

Bruges den sidste, bliver Afstanden positiv til Begyndelsespunktet og altsaa til alle Punkter paa samme Side af Linien som dette.

For yderligere at tydeliggjøre denne vigtige Theori, ville vi anvende den til at bevise den bekjendte Sætning, at Summen af Perpendikulærerne paa Siderne fra et vilkaarligt Punkt i en ligesidet Trekant er lig Højden.



Vi lægge Koordinatsystemet som Figuren viser og have da, idet Siden er a, for de tre Sider Ligningerne:

$$y = 0;\; y = x\,tg\,60^\circ = x\sqrt{3};$$
$$y = tg\,120^\circ\,(x - a) = -\sqrt{3}\,(x - a)$$

eller under Normalform

$$y = 0;\; \frac{y - x\sqrt{3}}{2} = 0;\; \frac{y + \sqrt{3}\,(x - a)}{2} = 0.$$

Sætningen forudsætter, at Afstandene for et Punkt inden i Trekanten regnes positive, og man maa derfor vælge Liniernes positive Sider mod Trekanten eller, for hver af dem, mod den modstaaende Vinkelspids. Nu giver den første Ligning Afstanden til B positiv, den anden giver Afstanden til A og den tredje Afstanden til O negative. Man maa derfor forandre Fortegn i de to sidste, saa at man bruger Formerne

$$y = 0;\; \frac{-y + x\sqrt{3}}{2} = 0;\; \frac{-y - \sqrt{3}\,(x - a)}{2} = 0,$$

der give Afstandene til et Punkt (x_1, y_1)

$$y_1;\; \frac{-y_1 + x_1\sqrt{3}}{2};\; \frac{-y_1 - \sqrt{3}\,(x_1 - a)}{2},$$

hvis Sum er lig Højden. Vi se tillige herved, at Sætningen gjælder, hvor end Punktet ligger, naar man lader dets Afstand fra enhver af Linierne skifte Fortegn, idet det passerer Linien.

18. Den Linie, der halverer Vinklen mellem to givne Linier.

Lad $\alpha = 0$ og $\beta = 0$ for Kortheds Skyld betegne Ligningerne for de givne Linier under Normalform. Ligningerne tænkes skrevne saaledes, at deres sidste

Led er positivt, saa at altsaa Begyndelsespunktet har positiv Afstand fra begge Linier. Afstandene til et vilkaarligt Punkt fra de to Linier ere da α og β, naar de i disse Udtryk forekommende x og y betegne Punktets Koordinater.

For ethvert Punkt i Halveringslinien ere disse Afstande numerisk lige store, saa at man for ethvert saadant Punkt har

$$\alpha - \beta = 0 \text{ eller } \alpha + \beta = 0. \qquad (30)$$

Den første af disse Ligninger tilhører den af Halveringslinierne, der ligger i den Vinkel, som indeholder Begyndelselsespunktet, thi for ethvert Punkt i denne Vinkel ere, lige som for Begyndelsespunktet, Afstandene positive. Den anden Ligning tilhører den Linie, der halverer Nabovinklen.

Ligger Begyndelsespunktet i en af Linierne, maa man benytte et andet Punkt.

Som Exempel ville vi søge Centrum for den indskrevne Cirkel i Trekanten med Vinkelspidserne (0,0), (2,3) og (5,1).

De tre Siders Ligninger ere

$$3x - 2y = 0; \; x - 5y = 0 \text{ og } 2x + 3y - 13 = 0,$$

der under Normalform, naar alle Afstande regnes positive mod Trekanten, blive

$$\frac{3x - 2y}{\sqrt{13}} = 0, \quad \frac{5y - x}{\sqrt{26}} = 0, \quad \frac{-2x - 3y + 13}{\sqrt{13}} = 0.$$

Halveringslinierne faa da Ligningerne

$$(3\sqrt{2}+1)x = (5+2\sqrt{2})y, \quad (2\sqrt{2}-1)x + (5+3\sqrt{2})y = 13\sqrt{2};$$
$$5x + y = 13,$$

af hvilke to give Skæringspunktet eller det søgte Centrum,

$$x = \frac{6 - \sqrt{2}}{2}; \; y = \frac{5\sqrt{2} - 4}{2}.$$

26. Hvor stor er Vinklen mellem Linierne $2x + 3y = 1$ og $3x - 2y = 1$?
27. Find Ligningen for en Linie gjennem Begyndelsespunktet og vinkelret paa Linien $ax + by = c$.
28. Find Ligningerne for de tre Højder i Trekanten i 2.
29. Hvor store ere Højderne i Trekanten i 2, og hvor stort er Trekantens Areal?
30. Hvor stort er Arealet af en Trekant, hvis ene Vinkelspids ligger i Begyndelsespunktet, medens de to andre ere (a, b) og (a_1, b_1)?
31. Bevis, at ethvert Punkt i en Linie, der staar vinkelret paa Midten af en given Linie, har lige store Afstande fra denne Linies Endepunkter.
32. Hvor stor er den spidse Vinkel mellem Linierne $2x + 3y = 1$ og $3x + 2y = 1$?

19. Betingelsen for, at tre rette Linier skære hverandre i ét Punkt, findes, naar man søger Skæringspunktet for de to Linier og indsætter dets Koordinater i Ligningen for den tredje; Betingelsen er altsaa, at man ved Elimination af x og y mellem de tre Ligninger skal komme til en Identitet. Saaledes skære de tre Linier

$$2x + 3y = 5;\ 6x - 5y = 1;\ x + y = 2$$

hverandre i ét Punkt, fordi man for to af dem faar Skæringspunktet (1, 1), der tillige tilfredsstiller Ligningen for den tredje. Ere Ligningerne for en Trekants Sider under Normalform, idet Afstandene ere positive mod Trekanten,

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,$$

blive Vinklernes Halveringslinier bestemte ved

$$\alpha - \beta = 0;\ \beta - \gamma = 0;\ \gamma - \alpha = 0,$$

der vise, at disse Linier skære hinanden i ét Punkt. Ligningerne give nemlig ved Addition en Identitet;

den ene kan altsaa dannes af de to andre og maa derfor tilfredsstilles af det ved dem bestemte Skæringspunkt.

Ere de tre Linier

$$ax + by + c = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

finder man ved Elimination af x og y

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

der altsaa i Almindelighed angiver den søgte Betingelse.

20. Betingelsen for, at tre Punkter (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ligge i én ret Linie, findes, naar man indsætter det tredje Punkts Koordinater i Ligningen for den rette Line gjennem de to andre; man faar ((14))

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (31)$$

der ogsaa strax erholdes, naar man udtrykker, at Liniens Stykker have samme Retningskoefficient ((3)).

Indsætter man i Liniens Ligning i dens Determinantform, faar man

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Arealet af den ved de tre Punkter bestemte Trekant findes let, idet Længden af den ene Side er

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

for at finde Højden paa denne, bringes dens Ligning ((14)) paa Normalform; man faar

$$\frac{(y - y_1)\ (x_2 - x_1) - (x - x_1)\ (y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = 0;$$

Højden findes ved i denne Lignings venstre Side at indsætte (x_3, y_3) for (x, y), saa at man, idet T er Arealet, har

$$2T = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

eller
$$2T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

der for $T = 0$ giver Betingelsen for, at de tre Punkter ligge i en ret Linie.

33. Bevis, at en Trekants tre Højder skære hverandre i ét Punkt.
34. Bevis, at Midtpunkterne af Diagonalerne i en fuldstændig firsidet Figur* ligge i en ret Linie.
35. Bevis, at Arealet af den Trekant, hvis Vinkelspidser ere Midtpunkterne af Siderne i en given Trekant, er en Fjerdedel af dennes Areal.

21. Liniebundter. Et System af Linier, der gaa gjennem ét Punkt, kaldes et Liniebundt. Dersom Punktet er (a, b), bliver Liniebundtets Ligning

$$y - b = \alpha(x - a), \tag{32}$$

hvor de forskjellige Linier i Bundtet svare til de forskjellige Værdier af α. Dersom $A = 0$ og $B = 0$ ere to givne Linier, vil

$$A + kB = 0 \tag{33}$$

være en Linie gjennem deres Skæringspunkt (Bundtets Toppunkt). Til forskjellige Værdier af k (Bundtets Parameter) svare forskjellige Linier, men som alle høre til samme Bundt. Naar en Linie i Bundtet skal bestemmes, maa k bestemmes, og der maa derfor gives en Egen-

*) Den tredje Diagonal er den Linie, der forbinder de modstaaende Siders Skæringspunkter.

skab ved Linien, der kan føre til en Ligning i k. Søger man f. Ex. Ligningen for en Linie, der gaar gjennem Skæringspunktet for Linierne

$$3x + 2y = 5 \text{ og } x + 3y = 4$$

og gjennem Punktet (2, 3), faar man først Formen

$$3x + 2y - 5 = k(x + 3y - 4);$$

da denne skal tilfredsstilles af (2, 3), bliver

$$7 = 7k; \; k = 1,$$

altsaa den søgte Ligning

$$2x - y = 1.$$

22. Geometriske Steder. Vi have set, at man, for at bestemme et Punkt, maa have givet saa meget, at man kan faa dannet to Ligninger mellem Punktets Koordinater og bekjendte Størrelser. For enhver anden ubekjendt Størrelse, som man fører ind i Regningen, maa man have en Ligning flere, for at man kan faa den ubekjendte Hjælpestørrelse elimineret. De to Ligninger give, ved at løses, Punktets Koordinater x og y, og dersom disse faa flere Værdier, er der flere Punkter, der tilfredsstille de givne Betingelser. Hver af de to Ligninger, tagen for sig, er Ligningen for en Kurve, der indeholder de søgte Punkter, og disse bestemmes saaledes som Skæringspunkter for de to Kurver. Dersom man skal konstruere Punktet, konstruerer man de to Kurver; dog søger man først at faa de for Konstruktionen bekvemmeste Kurver, ved af de givne Ligninger at danne ny.

Søge vi f. Ex. et Punkt, hvis Afstand fra Begyndelsespunktet er 4, og hvis Ordinat y er Mellemproportional mellem Abscissen x og Linien $8 - x$, faa vi

$$x^2 + y^2 = 16 \text{ og } y^2 = x(8 - x) \text{ eller } x^2 + y^2 = 8x.$$

Den første Ligning viser, at Punktet ligger paa en

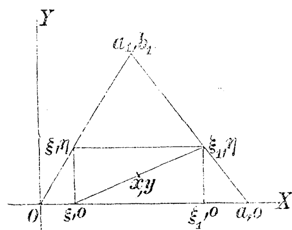
Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius 4 (5), den anden, at det ligger paa en Cirkel med Centrum i (4, 0) og Radius 4 (5). Disse to Cirklers Skæringspunkter ere da de søgte. Man kunde imidlertid ogsaa af de to givne Ligninger have dannet den simplere

$$x = 2,$$

der viser, at man i Stedet for en af de to Cirkler kan bruge en Linie, parallel med Ordinataxen i Afstanden 2.

Dersom man, efter at have udtrykt de givne Betingelser ved Ligninger, og efter at have elimineret de ubekjendte Hjælpestørrelser, kun faar én Ligning mellem et Punkts Koordinater, kan Punktet ikke bestemmes, men faar et geometrisk Sted, hvis Ligning netop er den fundne. Vi ville som Exempel herpaa søge det geometriske Sted for Midtpunkterne af Rektangler, indskrevne i en given Trekant.

Vi lægge Koordinatsystemet og betegne Koordinaterne som Figuren viser. Idet vi have givet Firkantens Vinkelspidser parvis ens Ordinater eller ens Abscisser, have vi allerede udtrykt, at Figuren er et Rektangel, ligesom vi ved Ordinaterne 0 have udtrykt, at de to Vinkelspidser ligge i Trekantens Grundlinie; tilbage have vi at udtrykke, at (0, 0), (ξ, η) og (a_1, b_1) ligge i en ret Linie, at $(a, 0)$, (ξ_1, η) og (a_1, b_1) ligge i en ret Linie, og at (x, y) er Diagonalens Midtpunkt; derved faa vi $a_1 \eta = b_1 \xi$; $(a_1 - a) \eta = b_1 (\xi_1 - a)$; $2x = \xi + \xi_1$; $2y = \eta$, der, ved Elimination af ξ, ξ_1 og η, give



$$2b_1 x - 2y(2a_1 - a) = ab_1,$$

saa at det søgte Sted er en ret Linie. Da Rektanglet i specielle Stillinger falder sammen med Højden og med Grundlinien, maa disses Midtpunkter ligge i den rette Linie, hvilket kan tjene som Prøve.

Det kan hænde, at Eliminationen kan udføres, uagtet der synes at mangle en Ligning. Man vil f. Ex. finde dette ved Opgaven:

I et Parallelogram trækkes Linierne PP_1 og QQ_1, hver parallel med et Sidepar. Vis, at det geometriske Sted for Skæringspunktet af Linierne PQ og P_1Q_1 er Diagonal i Parallelogrammet.

36. I en Trekant ligger Grundlinien fast, og Summen af de andre Sider er konstant; hvilket er det geometriske Sted for det Punkt i Højdens Forlængelse, hvis Afstand fra Grundlinien er lig en af Siderne?

37. De tre Sider i en foranderlig Trekant dreje sig om faste Punkter, der ligge i en ret Linie, medens de to Vinkelspidser gjennemløbe givne rette Linier; find det geometriske Sted for den tredje Vinkelspids.

38. I en Trekant trækkes en vilkaarlig Linie, parallel med den ene Side, og hvor den skærer de to andre Sider, oprejses Linier, vinkelrette paa disse; find det geometriske Sted for de vinkelrettes Skæringspunkt.

39. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra et Stykke af Abscisseaxen, fra Begyndelsespunktet til Punktet $(a, 0)$, ses under en ret Vinkel.

40. I en Trekant ABC søges Stedet for Skæringspunktet af Linierne Aa og Bb, idet a og b dele de to Sider i samme Forhold.

41. Vis at Ligningen
$$(ak + b)x + (a_1k + b_1)y + a_2k + b_2 = 0,$$

hvor k er variabel, repræsenterer et Liniebundt, og bestem Bundtets Toppunkt.

42. Hvilken er Ligningen for et Liniebundt med Parameteren k, naar de henholdsvis til $k = 0$, $k = \infty$ og $k = 1$ svarende Linier ere
$x + y + 7 = 0$; $3x + 5y + 1 = 0$; $2x + 3y + 4 = 0$.

43. Hvilke Linier i det ovenfor bestemte Bundt have Afstanden 5 fra Begyndelsespunktet?

44. Af en Figur konstrueres en ny Figur saaledes, at der til ethvert Punkt (x, y) af den første svarer et Punkt (x_1, y_1) af den anden, hvor
$x_1 = ax + by$; $y_1 = a_1x + b_1y$, idet $ab_1 - a_1b = 1$.
Bevis, at de to Figurer have samme Areal. (Bevis først, at Sætningen gjælder for Trekanter).

23. Den rette Linie er, ligesom Punktet, bestemt ved to Betingelser, idet disse give to Ligninger til Bestemmelse af de to Konstanter i den rette Linies Ligning. Dersom man kun har givet én Betingelse, kan kun den ene Konstant bortskaffes, og man faar da en Ligning med én Konstant, der gjælder for alle de Linier, der opfylde den givne Betingelse. Linierne danne et Liniesystem, og til hver enkelt Værdi af Konstanten svarer en Linie i Systemet. Tænkes Konstanten efterhaanden at gjennemløbe alle sine Værdier, vil Linien gjennemløbe alle sine Stillinger og under denne Bevægelse stadig røre en vis Kurve, som kaldes Liniens geometriske Sted (Enveloppe). I specielle Tilfælde kan denne Kurve gaa over til et Punkt, og Systemet er da et Liniebundt.

Søge vi f. Ex. en Linie, hvis Afstand fra Begyndelsespunktet har en given Længde r, faa vi

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + r = 0,$$

hvor α er den ubestemte Konstant. Enhver Linie i Systemet rører en Cirkel med Centrum i Begyndelses-

punktet og Radius r, og denne Cirkel er saaledes Liniens geometriske Sted.

24. Dersom Systemets Ligning er lineær med Hensyn til Konstanten, er Systemet et Liniebundt. At Ligningen er lineær med Hensyn til Konstanten k vil nemlig sige, at den kan skrives under Formen

$$A + kB = 0,$$

hvor A og B ere lineære med Hensyn til x og y. Enhver Linie i Systemet gaar altsaa gjennem Skæringspunktet for Linierne $A = 0$ og $B = 0$.

Søge vi f. Ex. en Linie, der af Axerne afskærer saadanne Stykker p og q, at

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{a},$$

hvor a er en given Linie, have vi kun denne ene Ligning til Bestemmelse af p og q i den almindelige Ligning for den rette Linie

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Eliminere vi q, faa vi Systemets Ligning

$$a(x - y) + p(y - a) = 0,$$

der viser, at Systemet er et Bundt gjennem Skæringspunktet af Linierne

$$x - y = 0; \; y - a = 0,$$

altsaa gjennem Punktet (a, a).

25. Sammensatte Kurver. Dersom $A = 0$, $B = 0$, $C = 0 \ldots$ ere Ligningerne for flere Kurver, vil

$$ABC \ldots = 0$$

være Ligningen for alle disse Kurver, tagne sammen som én. Ligningen tilfredsstilles nemlig af ethvert

Punkt, der gjør en af Faktorerne $A, B, C\ldots$ til Nul, og den tilfredsstilles ikke af andre Punkter, da intet Punkt kan gjøre Produktet til Nul, uden at gjøre en af Faktorerne til Nul.

Medens saaledes den rette Linies Ligning altid er af første Grad, kan en højere Grads Ligning svare til et System af flere rette Linier, nemlig naar den ordnede Lignings venstre Side kan opløses i Faktorer af første Grad.

Dette kan altid finde Sted, naar Ligningen er homogen med Hensyn til x og y. En saadan Ligning kan nemlig altid tænkes løst med Hensyn til $\frac{y}{x}$ og svarer derfor til saa mange rette Linier gjennem Begyndelsespunktet som $\frac{y}{x}$ har Værdier. Til de imaginære Rødder svare imaginære Linier, der ikke have nogen geometrisk Betydning; man tæller dem dog med, for at faa almengyldige Sætninger. Har man f. Ex. Ligningen

$$y^2 + axy + bx^2 = 0,$$

faar man

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\ ,$$

altsaa to rette, reelle, sammenfaldende eller imaginære Linier gjennem Begyndelsespunktet.

Skrives Ligningerne

$$y = x\, tg\, v \text{ og } y = x\, tg\, v_1,$$

har man $tg\, v \,.\, tg\, v_1 = b$, altsaa Linierne vinkelrette paa hinanden for $b = -1$.

Enhver imaginær Linie indeholder for Resten et reelt Punkt, thi dens Ligning har Formen

$$A + B\sqrt{-1} = 0$$

og tilfredsstilles altsaa af Koordinaterne til Skæringspunktet for $A = 0$ og $B = 0$.

For at finde, naar den almindelige Ligning af anden Grad

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tilhører et System af to rette Linier, tage vi et foreløbig ubestemt Punkt (a, b) til Begyndelsespunkt for et nyt Koordinatsystem, parallelt med det oprindelige. Kalde vi de ny Koordinater x_1 og y_1, ser man let, at man for et vilkaarligt Punkt har

$$x = x_1 + a; \; y = y_1 + b.$$

Indsættes disse Udtryk i Ligningen, faar man en ny Ligning

$$Ax_1{}^2 + By_1{}^2 + 2Cx_1y_1 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F_1 = 0,$$

hvor

$$D_1 = Aa + Cb + D; \; E_1 = Ca + Bb + E;$$
$$F_1 = Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Da + 2Eb + F.$$

Dersom Ligningen tilhører to rette Linier, maa den ny Ligning være homogen, hvis (a, b) er Liniernes Skæringspunkt; a og b maa altsaa kunne bestemmes saaledes, at $D_1 = E_1 = F_1 = 0$.

Den sidste Ligning simplificeres, idet man multiplicerer $D_1 = 0$ og $E_1 = 0$ henholdsvis med a og b og subtraherer fra $F_1 = 0$; man har da

$$Aa + Cb + D = 0,$$
$$Ca + Bb + E = 0,$$
$$Da + Eb + F = 0.$$

Betingelsen for at disse kunne tilfredsstilles findes ved Elimination af a og b, der giver

$$\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

som saaledes er den søgte Betingelse. Er denne opfyldt, findes Faktorerne lettest, idet man løser den givne Ligning som en Ligning af anden Grad med Hensyn til x eller y, idet Løsningerne da blive rationale.

Har man f. Ex.

$$y^2 + 3x^2 + 4xy - 8x - 6y + 5 = 0,$$

hvor

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

faar man

$$y = -2x + 3 \pm \sqrt{(3-2x)^2 - 3x^2 + 8x - 5}$$

eller

$$y = -x + 1 \text{ og } y = -3x + 5.$$

Exp.

45. Hvilken Kurve bestemmes ved Ligningen
$$x^2 - 2xy tg v - y^2 = 0?$$

46. Hvilken Kurve bestemmes ved Ligningen
$$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y - 1 = 0?$$

47. Hvilken Kurve bestemmes ved Ligningen
$$y^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6x^3 = 0?$$

48. Hvor stor er Vinklen mellem de to rette Linier, der fremstilles ved Ligningen
$$x^2 + xy - 6y^2 = 0?$$

49. Ved hvilken Ligning bestemmes de to rette Linier, der halvere Vinklerne mellem de to ved
$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$$
bestemte Linier?

§ 4. Cirklen.

26. Ligningen for en Cirkel med Centrum (a, b) og Radius r er

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \qquad (35)$$

der udtrykker, at Afstanden fra ethvert Punkt i Kurven til Centrum er lig r. Vi have allerede tidligere betragtet de specielle Former:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ og } x^2 + y^2 = 2rx, \tag{36}$$

svarende til Centret $(0, 0)$ og $(r, 0)$ (se 5).

Enhver Ligning af anden Grad, der ikke indeholder Leddet xy, og hvor x^2 og y^2 have samme Koefficient, tilhører en Cirkel. En saadan Ligning

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \tag{37}$$

kan nemlig skrives

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

og tilhører altsaa en Cirkel med Centrum $(-a, -b)$ og Radius $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Vi omtalte ovenfor, at man, for at faa almengyldige Sætninger, taler om imaginære Linier og Punkter, uagtet man ikke dermed kan forbinde nogen geometrisk Forestilling. Enhver Kurve faar derved foruden de Grene, vi kunne tegne, visse imaginære Grene, svarende til de imaginære Værdier af x og y, der tilfredsstille Ligningen. Saaledes indeholder Linien $x = y$ ethvert Punkt (a, a), hvad enten a er reel eller imaginær, men det er kun de til reelle a svarende Punkter, der ere beliggende i Planen.*)

Cirklen faar saaledes ogsaa sine imaginære Grene. Naar Radius er imaginær, faar den kun saadanne; naar Radius er Nul, faar den kun ét reelt Punkt, nemlig Centrum. Cirklen kan i dette Tilfælde betragtes som

---

*) Man har søgt at forestille sig de imaginære Grene som liggende uden for Planen. De reelle Punkter, der kunne tilhøre en saadan Gren, ere da dens Skæringspunkter med Planen. Det er imidlertid ikke lykkedes at gjennemføre denne Betragtning.

et System af to imaginære rette Linier gjennem dette Punkt, idet nemlig

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$$

kan deles i

$$y-b = \sqrt{-1}\,(x-a) \text{ og } y-b = -\sqrt{-1}\,(x-a).$$

Exp.

50. Find Koordinaterne til Centrum og Radius til Cirklen
$$x^2 + y^2 - 5x - 4y = 7.$$
51. Bring Ligningen
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$$
paa den almindelige Form for en Cirkels Ligning.
52. Find Ligningen for Centerlinien for Cirklerne
$$x^2 + y^2 = 2y \text{ og } x^2 + y^2 = 2x.$$
53. Find Ligningen for en Cirkel, der rører begge Axerne i en Afstand a fra Begyndelsespunktet.
54. Naar Koordinaterne til to Punkter (x, y) og (ξ, η) ere forbundne ved Ligningen
$$x^2 + y^2 + ax\xi + by\eta + c\xi + d\eta = e,$$
hvad bliver da det geometriske Sted for det ene Punkt, naar det andet ligger fast?
55. Find Ligningen for en Cirkel, som gaar gjennem Begyndelsespunktet, hvis Radius er 4, og som har sit Centrum paa Linien $x = y$.
56. Bestem det geometriske Sted for Højdernes Skæringspunkt i en Trekant, hvis ene Side ligger fast, medens den modstaaende Vinkel har en given Størrelse.
57. Kvadratet af et Punkts Afstand fra et givet Punkt staar i et givet Forhold til Punktets Afstand fra en given Linie. Bestem Stedet for Punktet.
58. En Linie med given Længde glider med sine Endepunkter i Axerne. I Endepunkterne oprejses vinkelrette paa Axerne. Bestem Stedet for disses Skæringspunkt.

59. Fra et Punkt i en Cirkelperiferi trækkes to paa hinanden vinkelrette Korder; vis, at den Linie, der forbinder disses Endepunkter, bestemmer et Liniebundt.

27. To Cirklers Skæringspunkter findes, idet x og y søges af Cirklernes Ligninger. Man danner først ved Subtraktion en Ligning af første Grad mellem x og y; denne Ligning maa tilhøre Fællessekanten, da den tilhører en ret Linie, der maa indeholde Cirklernes Skæringspunkter. Denne Linie kaldes Cirklernes Radikalaxe og er, som man ser, reel, selv om Cirklernes Skæringspunkter ere imaginære.

Skrive vi for Kortheds Skyld Cirklernes Ligninger, tagne under Formen (37), som

$$S = 0; \; S_1 = 0,$$

vil, idet k er et ubestemt Tal,

$$S + kS_1 = 0 \qquad (38)$$

være Ligningen for en Cirkel gjennem de givnes Skæringspunkter. Den bliver nemlig af anden Grad, indeholder ikke Leddet xy, og x^2 og y^2 faa begge Koefficienten $1 + k$. For at faa Cirklen bestemt, maa man have opgivet én Betingelse til, som den skal tilfredsstille; denne giver da en Ligning til Bestemmelse af k. For $k = -1$ gaar Cirklen over til den tidligere omtalte rette Linie, Radikalaxen.

Søger man f. Ex. Ligningen for en Cirkel, der gaar gjennem Begyndelsespunktet og gjennem Skæringspunkterne for Cirklerne

$$x^2 + y^2 - 3x + 2y + 4 = 0$$

og

$$x^2 + y^2 + x - 3y + 2 = 0,$$

faar man først den fælles Ligning for alle Cirkler gjennem de to Skæringspunkter

$$(1 + k)(x^2 + y^2) + (k - 3)x + (2 - 3k)y + 4 + 2k = 0.$$

Da denne skal tilfredsstilles af (0,0), maa man have
$$k = -2,$$
saa at den søgte Ligning bliver
$$x^2 + y^2 + 5x - 8y = 0,$$
der tilhører en Cirkel med Centrum $\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$ og Radius $\frac{\sqrt{89}}{2}$.

De ved (38) bestemte Cirkler siges at danne et Bundt.

Opgaver.

60. Find Ligningen for en Cirkel, der gaar gjennem Skæringspunkterne for Cirklerne $x^2 + y^2 = 2$ og $x^2 + y^2 = 2x$, og som skærer Cirklen $x^2 + y^2 = y + 2$ i to Punkter, som ligge i ret Linie med Begyndelsespunktet.

61. Bevis, at de tre Radikalaxer for tre Cirkler skære hverandre i ét Punkt.

62. Bevis, at Radikalaxerne for en fast Cirkel og alle Cirklerne i et Bundt danne et Liniebundt.

63. Ligningerne for fire vilkaarlige Cirkler ere givne hvilken Betingelse maa deres Koefficienter opfylde, naar det Bundt, der bestemmes ved den første og den anden, og det Bundt, der bestemmes ved den tredje og fjerde, skulle have en Cirkel fælles?

28. Cirklen gjennem tre givne Punkter (a_1, b_1), (a_2, b_2) og (a_3, b_3).

Den almindelige Ligning for Cirklen
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
indeholder tre Konstanter a, b og r, der, naar man søger en bestemt Cirkel, maa bestemmes ved Hjælp af de givne Betingelser. I det her betragtede Tilfælde faar man, da de givne Punkter skulle tilfredsstille Cirklens Ligning,

$$(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 = r^2,$$
$$(a_2 - a)^2 + (b_2 - b)^2 = r^2,$$
$$(a_3 - a)^2 + (b_3 - b)^2 = r^2,$$

der tjene til Bestemmelse af a, b og r.

Vi ville ikke her udvikle de sammensatte Udtryk for de ubekjendte, men vise, hvorledes man af Ligningerne kan udlede den søgte Cirkels geometriske Konstruktion. Man faar ved Subtraktion de to ny Ligninger

$$(a_1 - a_2)[2a - (a_1 + a_2)] + (b_1 - b_2)[2b - (b_1 + b_2)] = 0,$$
$$(a_2 - a_3)[2a - (a_2 + a_3)] + (b_2 - b_3)[2b - (b_2 + b_3)] = 0.$$

Disse to Ligninger bestemme Centrums Koordinater, og hver af dem, taget for sig, angiver derfor et geometrisk Sted for dette Punkt. Man ser let, at den første Ligning tilhører en ret Linie gjennem Punktet $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$ og vinkelret paa Linien fra (a_1, b_1) til (a_2, b_2), altsaa Perpendikulæren paa Midten af denne Linie. Den anden Ligning har en lignende Betydning, og man har saaledes af Ligningerne udledt den bekjendte Konstruktion.

64. Find Ligningen for en Cirkel gjennem Punkterne (1,2), (1,3) og (2,5).

65. Find Ligningen for en Cirkel, der gaar gjennem Begyndelsespunktet og gjennem Skæringspunkterne for to givne Cirkler.

66. Giv den almindelige Ligning for en Cirkel gjennem tre givne Punkter under Determinantform.

29. Skæring mellem en ret Linie og en Cirkel. Tangenten.

Man har to Ligninger til Bestemmelse af Skæringspunkternes Koordinater. Vi ville her kun betragte Cirklen med Centrum i Begyndelsespunktet

$$x^2 + y^2 = r^2$$

og tage Ligningen for den rette Linie under Normalform

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0.$$

Af disse faas ved Elimination af y

$$x^2 + 2px \cos \alpha + p^2 - r^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

hvoraf

$$x = -p \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{r^2 - p^2},$$

der atter giver (39)

$$y = -p \sin \alpha \mp \cos \alpha \sqrt{r^2 - p^2}.$$

For $p > r$ blive Skæringspunkterne imaginære; for $p = r$ blive de sammenfaldende, Linien altsaa Tangent til Cirklen. Tangentens Ligning bliver derfor

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + r = 0, \qquad (40)$$

hvor man maa erindre, at α, hvis Tangentens Retning er given, har to Værdier, da Perpendikulærens positive Retning er vilkaarlig. Tangentens Røringspunkt er bestemt ved

$$x_1 = -p \cos \alpha; \; y_1 = -p \sin \alpha.$$

Radius til dette Punkt faar Ligningen

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$$

og er altsaa vinkelret paa Tangenten. ((21)).

Multiplicerer man Tangentens Ligning med p, og indføres x_1 og y_1, faar man en anden Form

$$xx_1 + yy_1 = r^2, \qquad (41)$$

hvor Konstanterne ere forbundne ved Ligningen

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

30. Tangenten fra et Punkt (a, b). Polaren. Tangentens Ligning maa tilfredsstilles af (a, b), saa at man har Ligningerne

$$ax_1 + by_1 = r^2; \; x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

til Bestemmelse af Røringspunktet. Ved Elimination af

den ene ubekjendte faar man en Ligning af anden Grad, ved hvis Løsning der under Rodtegnet kommer

$$a^2 + b^2 - r^2,$$

saa at man kan trække to Tangenter, der falde sammen, naar $a^2 + b^2 = r^2$, altsaa naar Punktet ligger i Cirkelperiferien, og som blive imaginære, naar $a^2 + b^2 < r^2$, det vil sige, naar Punktet ligger inden for Periferien.

De to Ligninger tilhøre, som vi vide, naar de tages hver for sig, geometriske Steder for Røringspunkterne; den anden tilhører Cirklen og den første en ret Linie, som, da den indeholder Røringspunkterne, maa være Røringskorden eller, som den kaldes, Polaren til Punktet (a, b), der da kaldes Polen. Polaren, der altsaa har Ligningen

$$ax + by = r^2 \qquad (42),$$

er en reel Linie, selv om Røringspunkterne ere imaginære. En vilkaarlig ret Linies Ligning

$$Ax + By = C$$

kan skrives

$$\frac{Ar^2}{C} x + \frac{Br^2}{C} y = r^2,$$

og man ser da, ved Sammenligning med (42), at Linien har Polen $\left(\frac{Ar^2}{C}, \frac{Br^2}{C}\right)$.

67. Find Koordinaterne til Skæringspunkterne for
$x^2 + y^2 = 65$ og $3x + y = 25$.

68. Find Koordinaterne til Skæringspunkterne for
$(x - c)^2 + (y - 2c)^2 = 25c^2$ og $4x + 3y = 35c$.

69. Fra et Punkt i en Cirkelperiferi fældes vinkelrette paa to faste Tangenter og paa Røringskorden; bevis, at den sidste vinkelrette er Mellemproportional mellem de to første.

70. Find den Ligning, der bestemmer Retningskoefficienterne til de to Tangenter fra Punktet (x_1, y_1).

71. Hvilket er det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra man kan trække to paa hinanden vinkelrette Tangenter til en Cirkel?

31. Skal man konstruere Tangenterne fra (a, b), kan man bestemme Røringspunkterne ved de to geometriske Steder (36) og (42). I Stedet for Polaren bruges bedre en Cirkel, hvis Ligning faas ved at subtrahere de to Ligninger; den er

$$x^2 - ax + y^2 - by = 0;$$

den har Centrum $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, Radius $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ og følgelig Linien fra Centrum til det givne Punkt til Diameter. Ved at addere Ligningerne havde man faaet en anden Cirkel, der imidlertid ikke er saa bekvem for Konstruktionen.

32. Ligningen for Tangenten til (x_1, y_1) kan ogsaa findes saaledes:

Ligningen for en Cirkel med Centrum (x_1, y_1) og Radius c er

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = c^2$$

eller

$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = c^2 - r^2;$$

subtraheres denne Ligning fra den givne Cirkels Ligning, faar man Ligningen for de to Cirklers Radikalaxe:

$$2xx_1 + 2yy_1 = 2r^2 - c^2,$$

der, naar c aftager mod Nul, gaar over til Tangentens Ligning.

33. N a a r e t P u n k t (x_1, y_1) l i g g e r p a a P o l a r e n t i l e t a n d e t P u n k t (x_2, y_2), s a a l i g g e r d e t a n d e t P u n k t o g s a a p a a d e t f ø r s t e P u n k t s P o l a r.

Betingelsen for, at (x_1, y_1) ligger paa Polaren til (x_2, y_2), er nemlig

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = r^2,$$

som ogsaa bliver Betingelsen for, at (x_2, y_2) ligger paa Polaren til (x_1, y_1).

Denne Sætning kan ogsaa udtrykkes saaledes: Naar Polaren drejer sig om et givet Punkt, gjennemløber Polen dette Punkts Polar, og omvendt.

34. Vi ville her gjøre en almindelig Bemærkning, der er af Vigtighed for Løsningen af Opgaver. Opgaver, i hvilke man har at gjøre med Skæringspunkterne for en ret Linie og en Cirkel (eller anden Kurve), falde i to Grupper: saadanne, hvor hvert Skæringspunkt giver sin Løsning, og saadanne, hvor Skæringspunkterne spille samme Rolle i den samme Løsning. I det første Tilfælde maa man løse den Ligning, der tjener til Bestemmelse af Skæringspunkterne, medens man i det andet Tilfælde kan undgaa denne Løsning, thi da Skæringspunkterne spille samme Rolle, maa deres Koordinater indgaa symmetrisk i Udtrykkene og kunne da bortskaffes ved de bekjendte Relationer mellem Ligningens Rødder og dens Koefficienter. Vi ville tydeliggjøre dette ved at bevise Sætningen:

En vilkaarlig Linie gjennem Polen A skærer Polaren i B, Cirklen i C og D. De fire Punkter ligge harmonisk.

Lad A, B, C og D henholdsvis have Abscisserne a, a_1, x_1 og x_2. Man skal da bevise, at

$$\frac{a - x_1}{a - x_2} = -\frac{a_1 - x_1}{a_1 - x_2}$$

eller

$$2(aa_1 + x_1 x_2) = (a + a_1)(x_1 + x_2),$$

en Ligning, der er symmetrisk med Hensyn til x_1 og x_2,

hvilket kunde forudses, da der ikke er noget, der udmærker det ene Skæringspunkt med Cirklen fremfor det andet. Tænkes Abscisseaxen lagt gjennem A, bliver Ligningen for en vilkaarlig Linie gjennem dette Punkt

$$y = \alpha (x - a),$$

hvis Skæring med Polaren $ax = r^2$ giver $a_1 = \frac{r^2}{a}$. Skæringen med Cirklen bestemmes ved

$$(1 + \alpha^2)x^2 - 2a\alpha^2 x + \alpha^2 a^2 - r^2 = 0,$$

hvoraf

$$x_1 + x_2 = \frac{2\alpha^2 a}{1 + \alpha^2}; \quad x_1 x_2 = \frac{\alpha^2 a^2 - r^2}{1 + \alpha^2},$$

der tilfredsstille Betingelsesligningen.

35. Potensen af et Punkt med Hensyn til en Cirkel betyder Produktet af de Stykker, som Cirklen afskærer paa en Linie gjennem Punktet, Stykkerne regnede fra Punktet. Lad Punktet være (a, b), Ligningen for den rette Linie

$$y - b = \alpha (x - a)$$

og Abscisserne til dens Skæringspunkter med Cirklen x_1 og x_2; man har da ((3)) Potensen

$$P(a, b) = (1 + \alpha^2) \ (a - x_1) \ (a - x_2),$$

hvor x_1 og x_2 bestemmes ved Ligningen

$$x^2 + (b + \alpha (x - a))^2 - r^2 = 0.$$

Da Koefficienten til x^2 her er $1 + \alpha^2$, kan venstre Side skrives

$$(1 + \alpha^2) (x - x_1) (x - x_2),$$

der viser, at man blot behøver at sætte a for x i Udtrykket paa venstre Side af Lighedstegnet for at faa det søgte Udtryk,

$$P(a, b) = a^2 + b^2 - r^2. \qquad (43)$$

Potensen er altsaa uafhængig af α, det vil sige,

den bliver den samme for alle Linier gjennem (a, b), positiv for Punkter uden for, negativ for Punkter inden for Cirklen. Naar Skæringspunkterne falde sammen, bliver Linien Tangent til Cirklen, og Potensen bliver Tangentens Kvadrat. Det fundne Udtryk viser, at Potensen er Kvadratet paa Punktets Afstand fra Centrum minus Kvadratet paa Radius; man faar derfor for Cirklen

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r^2 = 0$$

$$P(a, b) = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 - r^2, \qquad (44)$$

saa at Potensen af et Punkt med Hensyn til en vilkaarlig Cirkel findes ved at indsætte Punktets Kordinater for x og y i venstre Side af Cirklens Ligning (skreven med Koefficienten 1 for x^2 og y^2 og med Nul paa højre Side). Man kan for Resten bevise denne almindelige Sætning paa samme Maade, som vi ovenfor beviste den specielle.

36. Vi kunne nu se Betydningen af Tallet k i Ligningen (38)

$$S + kS_1 = 0,$$

der, som vi have set, tilhører en Cirkel gjennem Skæringspunkterne af Cirklerne $S = 0$ og $S_1 = 0$. Ligningen kan nemlig skrives

$$S : S_1 = -k,$$

hvor de i S og S_1 forekommende x og y tilhøre et vilkaarligt Punkt i Cirklen (38). S og S_1 udtrykke da dette Punkts Potenser med Hensyn til de to Cirkler $S = 0$ og $S_1 = 0$, og Ligningen udtrykker, at Forholdet mellem disse Potenser er det samme for alle Punkter i (38). Specielt se vi, for $k = -1$, at to Cirklers Radikalaxe er det geometriske Sted for de Punkter, der have samme Potens med

Hensyn til Cirklerne, eller for de Punkter, hvorfra man kan trække lige store Tangenter til de to Cirkler.

37. Søge vi Ligningen for Polaren til Punktet (m, n) med Hensyn til den vilkaarlige Cirkel

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

kunne vi tænke os to ny Koordinataxer, parallele med de oprindelige, men igjennem Centrum. Betegne vi Punkternes Koordinater med Hensyn til dette System ved mærkede Bogstaver, faa vi som Polarens Ligning

$$x'm' + y'n' = r^2;$$

nu er imidlertid

$$x' = x - a; \quad m' = m - a; \quad y' = y - b; \quad n' = n - b,$$

saa at den søgte Ligning bliver

$$(x-a)(m-a) + (y-b)(n-b) = r^2. \quad (45)$$

Heri indbefattes Tangentens Ligning som specielt Tilfælde, idet Punktets Polar bliver Tangent til Punktet, naar dette falder paa Periferien. Man maa da erindre, at i dette Tilfælde ere Punktets Koordinater forbundne ved Ligningen

$$(m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2.$$

72. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra en given Linie ses under en given Vinkel.

73. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter staa i et givet Forhold.

74. En Linie drejer sig om et fast Punkt O, medens dens andet Endepunkt A gjennemløber en ret Linie; find det geometriske Sted for et andet Punkt a i Linien, naar $OA . Oa$ er konstant.

75. I en given Cirkel afsættes fra Centrum O ud ad en vilkaarlig Radius OA et Stykke OM, lig Radiens

Projektion paa en fast Diameter; find det geometriske Sted for *M*.

76. Find det geometriske Sted for et Punkt, hvis Afstand fra Grundlinien i en ligebenet Trekant er Mellemproportional mellem Afstandene fra Benene (Afstandene positive mod Trekanten).

77. Find det geometriske Sted for det Punkt, for hvilket Summen af Kvadraterne af Afstandene fra to faste Punkter er konstant.

78. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra Tangenterne til to givne Cirkler staa i et givet Forhold.

79. Bevis, at i en Trekant ligge Centrum for den omskrevne Cirkel, Medianernes Skæringspunkt og Højdernes Skæringspunkt i én ret Linie.

80. Bevis, at Kvadratet af Tangenten fra et Punkt af en Cirkel til en anden Cirkel staar i et konstant Forhold til Punktets Afstand fra Cirklernes Radikalaxe.

81. En retvinklet Trekant bevæger sig med Hypotenusens Endepunkter paa Axerne; find det geometriske Sted for Toppunktet af den rette Vinkel.

82. Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af Korder gjennem et givet Punkt.

83. En Korde ses fra et givet Punkt under en ret Vinkel; find det geometriske Sted for det Punkt, der deler Korden i to Stykker, hvis Mellemproportional er Punktets Afstand fra det givne Punkt; hvilke Punkter af Korden have denne Egenskab?

84. Gjennem et fast Punkt af en Diameter trækkes en Korde, hvis Endepunkter forbindes med Diametrens ene Endepunkt; bevis, at Forbindelseslinierne afskære

Stykker af Tangenten til Diametrens andet Endepunkt med konstant Produkt.

85. Fra to Punkter A og B fældes de vinkelrette AP og BQ, fra hvert Punkt paa det andet Punkts Polar med Hensyn til en Cirkel med Centrum O; bevis, at $OA : AP = OB : BQ$.

86. Bestem Lighedspunkterne for to vilkaarlige Cirkler og bevis, at de tre ydre Lighedspunkter for tre Cirkler ligge i en ret Linie.

87. Find Ligningen for den Cirkel, der er indskreven i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere (0,65), (—10,—15) og $\left(\frac{26}{3}, -\frac{13}{3}\right)$.

88. Gjennem Midtpunktet O af en Korde trækkes to andre Korder AB og CD; bevis, at AC og BD skære Korden i samme Afstand fra O.

89. Find Stedet for Centrerne af de Cirkler, der skære to givne Cirkler i diametralt modsatte Punkter.

90. To Cirkler gaa gjennem Begyndelsespunktet og have Centrerne henholdsvis i x-Axen og y-Axen. Find Stedet for deres fælles Tangenters Skæringspunkt.

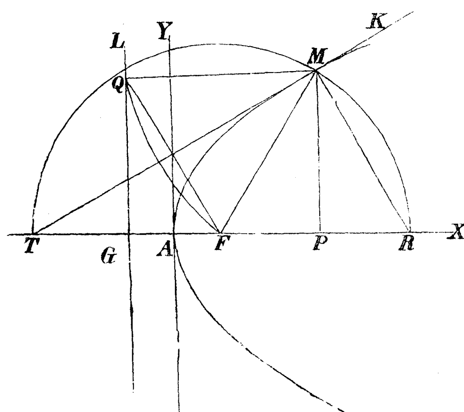
91. Find Stedet for de Punkter, fra hvilke to givne Cirkler ses under lige store Vinkler.

92. To Cirkler indeholde hver sit givne Punkt og have en given Radikalaxe. Find Stedet for den ene Cirkels Centrum, naar den anden Cirkels Centrum beskriver en ret Linie.

§ 5. Parablen.

38. Vi ville søge det geometriske Sted for Punkter med samme Afstand fra et givet Punkt F og en given Linie L.

Vi lægge Abscisseaxen gjennem F, vinkelret paa L, og betegne dens Skæringspunkt med L ved G. A, der



er Midtpunktet af FG, tages til Begyndelsespunkt. Ligningen for L bliver da, idet vi sætte $GF = \frac{1}{2}p$,

$$x + \frac{p}{4} = 0, \qquad (46)$$

medens Koordinaterne til F ere $\frac{p}{4}$ og 0. Afstanden fra L til et vilkaarligt Punkt (x, y) er da $x + \frac{p}{4}$, medens Afstanden fra Punktet til F er $\sqrt{\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2}$. I Følge den givne Betingelse skulle disse Afstande være lige store, hvorved man faar som Ligning for det geometriske Sted

$$y^2 = px. \qquad (47)$$

Denne Ligning har ingen af de tidligere undersøgte Former og maa derfor tilhøre en ny Kurve. Man kalder denne en Parabel, F dens Brændpunkt, L dens Ledelinie og A dens Toppunkt. p kaldes Parametren. Den er to Gange Ordinaten i Brændpunktet; thi denne bestemmes ved $y^2 = p \cdot \frac{p}{4}$, altsaa $y = \pm \frac{p}{2}$. Linien fra F til et Punkt M af Kurven kaldes Brændstraalen til Punktet; da den er lig Punktets Afstand fra Ledelinien, udtrykkes den ved

$$FM = x + \frac{p}{4}. \qquad (48)$$

Af Ligningen (47) kunne vi faa en Forestilling om Parablens Figur. x negativ giver y imaginær, saa at Kurven ligger helt paa de positive Abscissers Side; $x = 0$ giver $y = 0$, saa at Kurven gaar gjennem Begyndelsespunktet; til hver Værdi af x svare to Værdier af y, der ere numerisk lige store, men med modsatte Fortegn, saa at Kurven deles symmetrisk af den forlængede FG, der kaldes dens Axe; naar x voxer uden Grænse, voxer y ogsaa uden Grænse. Kurven er altsaa aaben mod X og sender sine to symmetriske Grene i det uendelige, saa at de fjærne sig mere og mere fra Axen. Jo mindre p bliver, desto mere nærme de to Grene sig til x-Axen; jo større p bliver, desto mere nærme de sig til y-Axen. Dersom man tog p negativ, kom Parablen til at vende til den modsatte Side.

Kurven kan kun tegnes kontinuert ved nye Apparater, der dog ikke have faaet nogen Betydning; man kan ved Passer og Lineal finde saa mange Punkter af den, som man vil, og forbinde dem paa fri Haand. Saaledes viser Ligningen, at man kan finde det til et vilkaarligt

x svarende y ved at søge Mellemproportionalen mellem den givne Parameter og x. Man kan ogsaa benytte den givne Definition og bestemme Punkter, der have en vilkaarlig valgt Afstand baade fra F og fra L. Punktet bestemmes da ved to geometriske Steder, nemlig en Cirkel om F og en ret Linie, parallel med L og i en Afstand derfra lig Cirklens Radius.

39. Betegner man en Linie fra Begyndelsespunktet til et Punkt af Kurven ved r, dens Vinkel med Axen ved v, har man

$$x = r \cos v; \; y = r \sin v,$$

altsaa, ved at indsætte i Kurvens Ligning, (foruden $r = 0$)

$$r = \frac{p \cos v}{\sin^2 v}. \qquad (49)$$

En anden Parabel med samme Toppunkt og Axe og med Parametren P afskærer af den samme Linie fra A et Stykke

$$R = \frac{P \cos v}{\sin^2 v}.$$

Heraf faas

$$R : r = P : p,$$

saa at de to Parabler afskære proportionale Stykker af alle Linier gjennem deres fælles Toppunkt. Kurver, der have denne Egenskab, kaldes ligedannede, og da P og p ere vilkaarlige, blive saaledes alle Parabler ligedannede.*)

40. En Korde, der forbinder to af Parablens Punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2), danner med X en Vinkel v, bestemt ved

*) Paa samme Maade ses, at enhver Ligning, der er homogen med Hensyn til x, y og p, giver ligedannede Kurver, naar p (Parametren i videre Forstand) varierer.

$$tg\,v = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}$$
$$= \frac{px_2 - px_1}{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)} = \frac{p}{y_2 + y_1}$$

eller, idet Ordinaten til Kordens Midtpunkt kaldes η,

$$tg\,v = \frac{p}{2\eta}. \qquad (50)$$

Heraf ses, at det geometriske Sted for Midtpunkterne af et System af parallele Korder er en ret Linie, parallel med Axen. Dersom nemlig Kordernes Vinkel med X er v, bestemmes Midtpunktet for enhver af dem ved $\eta = \frac{p}{2\,tg\,v}$, saa at alle Midtpunkterne ligge paa Linien

$$y = \frac{p}{2\,tg\,v}. \qquad (51)$$

Denne Linie kaldes Kordesystemets Diameter; den afhænger alene af Kordesystemets Retning, og omvendt, naar Diametren er given, bestemmes let det dertil hørende Kordesystem ved Regning eller Konstruktion.

41. Dersom de to Punkter rykke sammen til ét, falde de begge sammen med Kordens Midtpunkt, og Linien gjennem Punkterne bliver en Tangent med dette Midtpunkt til Røringspunkt. Tangentens Retning bestemmes altsaa ved

$$tg\,v = \frac{p}{2\eta}, \qquad (52)$$

idet (ξ, η) er Røringspunktet; dens Ligning bliver da

$$y - \eta = \frac{p}{2\eta}(x - \xi)$$

eller, idet $\eta^2 = p\xi$,

$$2y\eta = p(x + \xi). \qquad (53)$$

Ønsker man Tangenten bestemt alene ved dens

Retning, elimineres ξ og η ved Hjælp af (52) og

$$\eta^2 = p\xi;$$

man faar derved

$$y = x\,tg\,v + \frac{p}{4tg\,v}.$$

Ordnes denne Ligning med Hensyn til $tg\,v$, faar man

$$tg^2 v - \frac{y}{x}\,tg\,v + \frac{p}{4x} = 0,$$

der viser, at man fra et givet Punkt (x, y) kan trække to Tangenter, hvis Retningskoefficienter have Summen $\frac{y}{x}$ og Produktet $\frac{p}{4x}$.

42. Dersom (ξ, η) er et vilkaarligt Punkt, bliver (53) Ligningen for dets Polar. Dette bevises ganske som ved Cirklen (se 30).

43. En Linie, vinkelret paa en Tangent til en Kurve i Røringspunktet, kaldes en Normal. Normalen til (ξ, η) bliver ((25))

$$y - \eta = -\frac{2\eta}{p}(x - \xi). \qquad (54)$$

Ere T og R Axens Skæringspunkter henholdsvis med Tangent og Normal, faar man deres Abscisser bestemte ved i Ligningerne (53) og (54) at sætte $y = 0$, hvorved man faar

$$AT = -\xi,\ AR = \xi + \frac{p}{2}. \qquad (55)$$

Endvidere haves, idet P er Projektionen af M paa Axen,

$$AP = \xi;\ AF = \frac{p}{4},$$

altsaa

$$PT = PA + AT = -2\xi;\ PR = PA + AR = \frac{p}{2}. \quad (56)$$

PT og PR (regnede med Fortegn) kaldes henholdsvis Subtangent og Subnormal. Den sidste er, som (56) viser, konstant.

Endvidere

$$FT = -\left(\xi + \frac{p}{4}\right); \quad FR = \xi + \frac{p}{4} = FM, \qquad (57)$$

saa at Punkterne T, R og M ligge i samme Afstand fra Brændpunktet.

Denne Egenskab benyttes, naar man vil trække en Tangent eller Normal til M. En Cirkel gjennem M med Centrum i F skærer nemlig Axen i T og R.

44. Tangenten halverer Vinklen mellem Brændstraalen og en Linie gjennem Røringspunktet, parallel med Axen.

Man har nemlig, idet Q er Projektionen af M paa L,

$\angle QMT = \angle MTF$, men da $FT = FM$, er

$\angle MTF = \angle TMF$, altsaa $\angle QMT = \angle TMF$.

Da QMF er ligebenet, ses heraf, at Tangenten er vinkelret paa Midten af FQ, saa at Ledelinien er det geometriske Sted for det med Brændpunktet m. H. t. Tangenten symmetriske Punkt og at det geometriske Sted for Brændpunktets Projektion paa Tangenten (Midtpunktet af FQ) er Toppunktets Tangent. Vi ville ogsaa søge dette Sted ad analytisk Vej, da Regningen frembyder et lærerigt Exempel.

Tangentens Ligning er

$$2y\eta = p(x + \xi),$$

hvor

$$\eta^2 = p\xi.$$

Den vinkelrette fra Brændpunktet faar Ligningen

$$y = -\frac{2\eta}{p}\left(x - \frac{p}{4}\right).$$

Da det søgte Punkt er Skæringspunkt for de to rette Linier og altsaa maa tilfredsstille deres Ligninger, faas det geometriske Sted ved at eliminere ξ og η mellem de tre Ligninger; man faar af de to sidste

$$\eta = \frac{-py}{2\left(x-\frac{p}{4}\right)};\ \xi = \frac{py^2}{4\left(x-\frac{p}{4}\right)^2},$$

som, indsat i den første, efter Reduktionen giver

$$x\left(y^2+\left(x-\frac{p}{4}\right)^2\right)=0.$$

Man ser, hvor vigtigt det er, ikke at bortkaste Faktoren x, da $x=0$ netop er den søgte Løsning. Man faar imidlertid tillige

$$y^2+\left(x-\frac{p}{4}\right)^2=0,$$

der ikke tilfredsstilles af andre reelle Punkter end Brændpunktet. Denne Del af det geometriske Sted hidrører fra imaginære Tangenter, som man paa Grund af vore almindelige Formler ikke kan undgaa at faa med i Regningen. Blandt disse ere Tangenterne fra Brændpunktet, der, skjønt de ere imaginære, maa give et reelt Punkt, nemlig selve Brændpunktet, der maa blive sin egen Projektion paa en Linie derigjennem, hvad enten Linien er reel eller imaginær.

De ovenfor fundne Egenskaber ved Tangenten lede til en Konstruktion af Tangenten gjennem et givet Punkt K uden for Kurven. Da Tangenten er vinkelret paa Midten af FQ, maa en Cirkel om K som Centrum og gjennem F skære Ledelinien i Q; en Linie, vinkelret paa Midten af FQ, er da den søgte Tangent; dens Skæringspunkt med en Linie fra Q, parallel med Axen, er Røringspunktet. Da Cirklen skærer Ledelinien i to Punkter Q, faar man to Tangenter, som falde sammen

til én, naar Cirklen rører Ledelinien, det vil sige, naar det givne Punkt ligger paa Parablen. Ligger det inden for Parablen, faar Cirklen intet Punkt fælles med L, og der kan ikke trækkes nogen Tangent.

Skal man trække en Tangent, parallel med en given Linie, nedfælder man fra Brændpunktet en vinkelret paa denne og finder derved Punktet Q.

93. Gjennem Toppunktet af en Parabel trækkes to paa hinanden vinkelrette Korder; bevis at den Korde der forbinder disses Endepunkter, gaar gjennem et fast Punkt.

94. Find det geometriske Sted for Skæringspunkterne af de Tangenter til en Parabel, for hvilke a) Produktet af Sinusserne, b) Produktet af Tangenserne, c) Summen eller d) Differensen af Cotangenserne af de Vinkler, de danne med Axen, er konstant.

95. Til en Parabel trækkes tre Tangenter, den ene til Toppunktet; bevis, at Arealet af den Trekant, som de begrænse, er det halve af Arealet af den Trekant, som man faar ved at forbinde Røringspunkterne.

96. Bevis, at den Linie, der forbinder Brændpunktet med Polen til en vilkaarlig Linie gjennem Brændpunktet, er lodret paa denne.

97. Til en Parabel trækkes tre Tangenter, den ene til Toppunktet; bevis, at Højderne i den af dem dannede Trekant skære hverandre i Ledelinien.

98. Bevis, at den samme Trekants omskrevne Cirkel gaar gjennem Brændpunktet.

99. Bevis, at i enhver Parabel er Brændstraalen til et Punkt lig det Stykke, som afskæres paa Punktets Ordinat mellem Axen og den Tangent, der rører Kurven i Endepunktet af Ordinaten gjennem Brændpunktet.

100. Til et Punkt i en Parabel trækkes Normalen og en Brændstraale; bevis, at Normalens Projektion paa Brændstraalen er lig den halve Parameter.

101. At konstruere en Parabel af to Punkter og Ledelinien.

102. At konstruere en Parabel af to Punkter og Brændpunktet.

103. At konstruere en Parabel af to Tangenter og Brændpunktet.

104. At konstruere en Parabel af to Tangenter og Ledelinien.

105. At konstruere en Parabel af en Tangent, et Punkt og Brændpunktet.

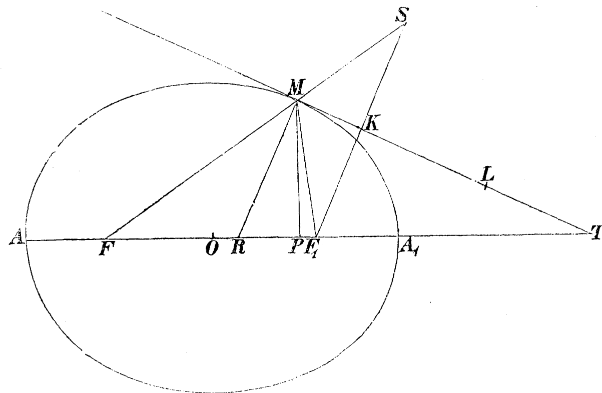
106. At finde Skæringspunkterne for en ret Linie og en Parabel (given ved Brændpunkt og Ledelinie).

107. At finde Skæringspunkterne for to Parabler med fælles Brændpunkt.

§ 6. Ellipse og Hyperbel.

45. Vi søge de geometriske Steder for de Punkter $M(x, y)$, hvis Afstande fra to givne Punkter F og F_1 have henholdsvis en given Sum eller Differens $2a$.

Vi lægge Abscisseaxen gjennem F og F_1, saa at FF_1 er positiv, og tage O, Midtpunktet af FF_1, til Begyndelsespunkt. Vi afsætte paa Axen $AO = OA_1 = a$ og betegne Forholdet $OF : OA$ ved Tallet e. Naar FM og F_1M begge regnes positive, maa A og A_1 falde uden for F og F_1, naar det er Afstandenes Sum, inden for, naar det er deres Differens, der skal være $2a$. I første Tilfælde bliver da $e < 1$, i andet Tilfælde $e > 1$.



Vi have nu i begge Tilfælde, idet Abscisserne til F og F_1 blive henholdsvis $-ea$ og $+ea$,

$$FM^2 = y^2 + (x + ea)^2, \; F_1M^2 = y^2 + (x - ea)^2,$$

altsaa

$$FM^2 - F_1M^2 = 4eax.$$

Endvidere er, idet øverste og nederste Fortegn svare til henholdsvis første og andet Tilfælde,

$$FM \pm F_1M = 2a,$$

altsaa ved Division

$$FM \mp F_1M = 2ex,$$

hvoraf

$$FM = a + ex; \; F_1M = \pm (a - ex).$$

Indsættes nu FM i Udtrykket for FM^2, faar man

$$(a + ex)^2 = y^2 + (x + ea)^2,$$

hvoraf

$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2) \tag{58}$$

eller

$$y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2), \tag{59}$$

hvilke Formler kun i Skrivemaaden ere forskjellige. Vi benytte den første Form for $e < 1$, den anden for $e > 1$. Talfaktoren paa højre Side er da i begge Tilfælde positiv.

Vi ere atter her komne til en Ligning af en ny Form; den svarer til Kurver af forskjellig Form, efter som $e < 1$ eller $e > 1$. Vi kalde Kurven i første Tilfælde en Ellipse, i andet en Hyperbel*); F og F_1 kaldes Brændpunkter, FM og F_1M Brændstraaler, A og A_1 Toppunkter, O Centrum. AA_1 $(2a)$ kaldes Ellipsens store Axe, Hyperblens første (transverse) Axe; e kaldes Excentriciteten.

Begge Kurver deles symmetrisk af begge Koordinataxer; thi da Ligningerne kun indeholde Kvadraterne af x og y, maa de, naar de tilfredsstilles af et Punkt (x, y), ogsaa tilfredsstilles af Punkterne $(-x, y)$ og $(x, -y)$, der netop ere de med det første symmetriske Punkter.

Skæringspunkterne med en vilkaarlig ret Linie bestemmes ved en Ligning af anden Grad; der bliver altsaa to, der kunne falde sammen til ét (Tangenten) eller blive imaginære.

46. Naar to saadanne Kurver have samme Excentricitet, ere de ligedannede. Man faar nemlig af (58), idet man, som ved Parablen, sætter $x = r \cos v$, $y = r \sin v$,

$$r^2 = a^2 \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 v},$$

der viser, at, for e konstant, ere r og a proportionale.

Vi ville nu nærmere undersøge Kurvernes Figur.

A. Ellipsen

$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

47. Da y^2 og $1 - e^2$ ere positive, maa $a^2 - x^2$ ogsaa være positiv. x maa altsaa falde mellem Grænserne $+a$ og $-a$. Naar x har en af sine Grænse-

*) Parabel, Ellipse og Hyperbel kaldes af Grunde, vi senere komme til at nævne, med et fælles Navn Keglesnit.

værdier, er $y = 0$; jo mindre (numerisk) x bliver, desto større bliver y, der faar sin største Værdi for $x = 0$. Denne Værdi af y betegnes ved b, altsaa

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \qquad (60)$$

De dertil svarende Punkter af Kurven kaldes ogsaa Toppunkter og $2b$ den lille Axe.

For $e = 0$ er Ellipsen en Cirkel, nemlig $y^2 = a^2 - x^2$. I dette Tilfælde er $b = a$. Jo større a bliver i Forhold til b, desto større bliver Excentriciteten, desto mere fjærner Kurven sig fra Cirkelformen, desto mere langstrakt bliver den, indtil den for $a = \infty$ gaar over til et System af to parallele Linier. Dette ses bedst ved at indføre b i Ligningen, der, idet

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2},$$

bliver

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ eller } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (61)$$

som for $a = \infty$ giver $y = \pm b$.

48. Ordinaten gjennem et Brændpunkt kaldes den halve Parameter. Betegnes denne ved p, har man

$$\frac{1}{4}p^2 = (1 - e^2)(a^2 - a^2e^2)$$

eller

$$p = 2a(1 - e^2). \qquad (62)$$

Derved kan atter Ligningen gives en ny Form

$$y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2). \qquad (63)$$

Uagtet Kurven er bestemt ved to Konstanter, have vi her betragtet fire, men de to af disse kunne altid bestemmes af de to andre ved Ligningerne

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}. \qquad (64)$$

Brændstraalerne til Punktet (x, y) ere, som vi have set i 45, udtrykte ved

$$FM = a + ex, \quad F_1M = a - ex, \qquad (65)$$

der altid ere positive.

49. Ellipsen beskrives i Følge Definitionen, naar man fastgjør en Snor af Længden $2a$ med Endepunkterne i F og F_1 og fører en Stift rundt, saaledes at den stadig holder Snoren stram; man kan ved Passeren finde saa mange Punkter i den, som man vil, idet man med Brændpunkterne som Centrer beskriver Cirkler, hvis Radiers Sum er $2a$. Det kan ogsaa gjøres ved over $2a$ som Diameter at beskrive en Cirkel og fra Axen afskære $\frac{b}{a}$ af dennes Ordinater. Cirklens Ligning bliver nemlig

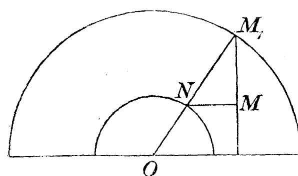
$$Y^2 = a^2 - X^2,$$

medens Ellipsens er

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

For Punkter med samme Abscisse faar man da

$$\frac{y^2}{Y^2} = \frac{b^2}{a^2} \text{ eller } \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$



For at udføre Konstruktionen, tegner man ogsaa om O en Cirkel med Radius b; skærer en vilkaarlig Linie fra O de to Cirkler i N og M_1, vil NM, parallel med Axen, dele Ordinaten til M_1 i det forlangte Forhold, saa at M bliver et af Ellipsens Punkter.

Drejes Cirklen om sin Diameter en Vinkel, hvis

cos er $\frac{b}{a}$, og projiceres den derpaa paa sin oprindelige Plan, maa dens Projektion netop blive Ellipsen, thi ved Projektionen multipliceres enhver af Cirklens Ordinater netop med *cos* til Planernes Heldningsvinkel, altsaa med $\frac{b}{a}$. Man udleder let mange Egenskaber ved Ellipsen ved paa denne Maade at betragte den som Projektionen af en Cirkel. Saaledes ser man f. Ex., at Tangenten til M i Ellipsen og Tangenten til M_1 i Cirklen maa skære Axen i samme Punkt. Ellipsens Tangent maa nemlig være Projektionen af Cirklens Tangent, thi en Tangent er en Linie gjennem to sammenfaldende Punkter, og disses Projektioner maa ogsaa blive sammenfaldende. Tangentens Skæringspunkt med Axen kan imidlertid ikke forandres ved Projektionen, da Axen bliver liggende. Eleven kan selv forsøge at anvende denne Betragtningsmaade til at finde Konstruktionen af en Tangent fra et givet Punkt til Ellipsen.

Er v den Vinkel, som ON danner med Axen, har man for Punktet M

$$x = a \cos v; \; y = b \sin v,$$

der ofte bruges i Stedet for Ellipsens Ligning.

108. Hvilken Kurve fremstilles ved $2x^2 + 3y^2 = 8$? Hvor store ere dens Konstanter?

109. Find a og e i en Ellipse, hvor $b = p = 4$.

110. Vis, at de Ellipser, der svare til forskjellige Værdier af c i Ligningen

$$ax^2 + by^2 = c,$$

ere ligedannede og ligedan beliggende.

111. Hvorledes ligger Ellipsen (61), naar $b > a$?

112. En ret Linie med konstant Længde glider med sine Endepunkter paa Axerne. Hvilken Kurve beskrives af et Punkt, der deler Linien i to Stykker a og b?

113. M er et vilkaarligt Punkt af en Ellipse; til Trekanten FMF_1 tegnes de to Røringscirkler, der røre Brændstraalerne udvendig; bestem disse Cirklers Røringspunkter med FF_1, og find de geometriske Steder for deres Centrer.

114. Bevis, at en Ellipsekorde, der fra Centrum ses under en ret Vinkel, har konstant Afstand fra Centrum.

115. M er et vilkaarligt Punkt af en Ellipse; find det geometriske Sted for Skæringspunktet af Medianerne i Trekanten AMA_1.

B. Hyperblen

$$y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2).$$

50. Da y^2 og $e^2 - 1$ ere positive, maa $x^2 - a^2$ ogsaa være positiv. x maa altsaa falde uden for Grænserne $+a$ og $-a$. Naar x har en af sine Grænseværdier, er $y = 0$; jo større (numerisk) x bliver, desto større bliver y, der kan voxe uden Grænse. Kurven bestaar altsaa af to uendelige, aabne Grene, der udgaa fra A og A_1, hver til sin Side med Koordinataxerne til Symmetriaxer.

For $x = 0$ faar man $y = a\sqrt{e^2 - 1}\sqrt{-1}$. Den til den lille Axe ved Ellipsen svarende Linie er altsaa imaginær. Den i Udtrykket forekommende reelle Faktor $a\sqrt{e^2 - 1}$ plejer man at kalde Hyperblens anden Halvaxe og betegne ved b, altsaa er

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}. \qquad (66)$$

Parametren bestemmes som ved Ellipsen ved

$$\frac{1}{4}p^2 = (e^2 - 1)(a^2e^2 - a^2),$$

altsaa

$$p = 2a(e^2 - 1). \qquad (67)$$

Ligningerne

$$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$$

forbinde de fire Konstanter.

For $e = \sqrt{2}$ bliver $b = a$, $p = 2a$ og Ligningen

$$y^2 = x^2 - a^2. \qquad (68)$$

Hyperblen kaldes i dette Tilfælde ligesidet.

Ved Benyttelse af (66) og (67) faar man for Hyperblens Ligning de nye Former

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \text{ eller } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (69)$$

og

$$y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - a^2). \qquad (70)$$

Brændstraalerne til Punktet (x, y) fandt vi udtrykte ved

$$FM = ex + a; \; F_1M = ex - a. \qquad (71)$$

De ere begge positive, naar x er positiv, da $e > 1$, $x > a$. De ere derimod negative, naar Punktet ligger paa den Gren, der vender mod x-Axens negative Retning.

51. Hyperbelbuers Beskrivelse ved en Bevægelse kan ske ved et Apparat, der dog ikke har faaet nogen Betydning; man kan ved Passeren finde saa mange Punkter, som man vil, ved, med Brændpunkterne som Centrer, at tegne Cirkler, hvis Radiers Differens er $2a$. Enhver Hyperbel kan betragtes som Projektion af en ligesidet Hyperbel, ligesom Ellipsen af en Cirkel; den ligesidede Hyperbel kan imidlertid kun beskrives ved Punkter. Dette sker lettest ved at bemærke, at enhver Ordinat er lig den Tangent, der fra dens Fodpunkt kan drages til den Cirkel, hvis Diameter er den første Axe. Denne Tangents Længde bliver nemlig $\sqrt{x^2 - a^2}$.

§ 7. Ret Linie, kombineret med Ellipse og Hyperbel.

52. Før vi gaa over til disse Undersøgelser, ville vi gjøre en Bemærkning, der vil komme os til Nytte. Vi ville betragte en Ligning f. Ex.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Dersom $e = 0$, er, som bekjendt, én af Rødderne Nul; dersom tillige $d = 0$, ere to Rødder Nul o. s. v. Ved Division med x^4 skrives Ligningen

$$e\left(\frac{1}{x}\right)^4 + d\left(\frac{1}{x}\right)^3 + c\left(\frac{1}{x}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x}\right) + a = 0,$$

der viser, at for $a = 0$ er $\frac{1}{x} = 0$, altsaa $x = \infty$; er tillige $b = 0$, blive to af Værdierne for x uendelige o. s. v. Vi se heraf, at en Ligning, hvis Grad for specielle Værdier af Koefficienterne bliver nogle Enheder lavere, faar lige saa mange Rødder uendelige. En Ligning af 2den Grad har 2 Rødder, men dersom den er et specielt Tilfælde af en Ligning af 4de Grad, ere de to andre Rødder uendelig store. Dette faar særlig Betydning, naar vi bestemme Kurvers Skæringspunkter, da et uendelig fjærnt reelt Skæringspunkt forudsætter uendelige Grene, og saadanne ere meget karakteristiske for Kurvernes Figur.

Tage vi f. Ex. Hyperblen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ og Kurven } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

skulde vi efter Ligningernes Grad vente en Endeligning af 4de Grad. Den reduceres imidlertid til Absurditeten $1 = 0$, der viser, at alle fire Rødder ere uendelig store. Den sidste Kurve er imidlertid et System af to rette Linier, nemlig $y = \pm \frac{b}{a} x$. Altsaa skære begge disse

Linier Kurven kun i uendelig fjærne Punkter. Man kalder dem Asymptoterne. De kunne opfattes som Tangenter, hvis Røringspunkter have fjærnet sig i det uendelige. Da Asymptoternes Stilling kun afhænger af $b:a$ og altsaa af e, bliver den ens for alle ligedannede Hyperbler, der ere ligedan beliggende med Centrum til Lighedspunkt.

Ombytter man i (69) 1 med -1, faar man Ligningen for den konjugerede Hyperbel. De to Hyperbler have de samme Asymptoter, men ligge i forskjellige Vinkelrum.

116. Bevis, at der mellem en Hyperbel og dens Asymptoter afskæres lige store Stykker af en vilkaarlig ret Linie.

117. Gjennem Toppunktet af et Keglesnit trækkes to paa hinanden vinkelrette Korder; bevis, at den Korde, der forbinder disses Endepunkter, gaar gjennem et fast Punkt.

118. Et Parallelogram har sin ene Vinkelspids paa en Hyperbel, medens de to Sider falde paa Asymptoterne; bevis, at dets Areal er konstant.

119. Bevis, at Arealet mellem Asymptoterne og en Tangent er konstant.

53. Vi ville nu betragte Kurverne

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (72)$$

og bestemme deres Skæringspunkter med en ret Linie gjennem Punktet (x_1, y_1); dens Ligning kunne vi skrive

$$\frac{x - x_1}{\cos u} = \frac{y - y_1}{\sin u} = r, \qquad (73)$$

idet r er Afstanden fra (x_1, y_1) til (x, y). Vi søge nu r, da vi derpaa let finde x og y, idet

$$x = x_1 + r \cos u; \; y = y_1 + r \sin u. \qquad (74)$$

Vi faa, ved at indsætte disse Værdier i (72) og ordne, en Ligning af Formen

$$\left.\begin{array}{l} Ar^2 + 2Br + C = 0, \\ \text{hvor} \\ A = \frac{\cos^2 u}{a^2} \pm \frac{\sin^2 u}{b^2}, \\ B = \frac{x_1 \cos u}{a^2} \pm \frac{y_1 \sin u}{b^2}, \\ C = \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} - 1. \end{array}\right\} \quad (75)$$

Vi undersøge nu særlig de Tilfælde, der indtræde, naar én eller flere af disse Koefficienter blive 0.

a) $A = 0$.

54. Dette Tilfælde kan ikke indtræde reelt for øverste Fortegn, altsaa for Ellipsen; det indtræder for Hyperblen, naar

$$tg\, u = \pm \frac{b}{a}, \quad (76)$$

altsaa naar Linien er parallel med en af Asymptoterne; enhver saadan Linie skærer altsaa Hyperblen i et uendelig fjærnt Punkt.

b) $B = 0$.

55. Dette Tilfælde indtræder, naar

$$y_1 = \mp \frac{b^2 x_1}{a^2 tg\, u}. \quad (77)$$

Ligningen bliver ren kvadratisk, saa at de to Værdier af r ere lige store med modsatte Tegn; da nu r er Afstanden fra (x_1, y_1) til Skæringspunkterne, bliver (x_1, y_1) Kordens Midtpunkt. Dersom u er en given Vinkel, ligge de derved bestemte parallele Korders Midtpunkter paa den rette Linie

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2\, tg\, u} x, \quad (78)$$

der kaldes Kordesystemets Diameter. Betegnes Diametrens Vinkel med Abscisseaxen ved v, bliver

$$tg\,u\,.\,tg\,v = \mp \frac{b^2}{a^2}. \qquad (79)$$

Deraf ses tillige, at et Kordesystem med Vinklen v vilde have en Diameter med Vinklen u. To saadanne Diametre, hvoraf enhver tilhører den andens Kordesystem, kaldes konjugerede.

Fortegnet for $tg\,u\,.\,tg\,v$ viser, at ved Ellipsen er den ene af de to Vinkler spids, den anden stump, medens de ved Hyperblen ere begge spidse eller begge stumpe.

Enhver af Asymptoterne er sin egen konjugerede Diameter.

56. Naar en Ellipse paa den ovenfor omtalte Maade betragtes som Projektionen af en Cirkel, blive et Par af dens konjugerede Diametre Projektionerne af et Par paa hinanden vinkelrette Diametre i Cirklen. Enhver af disse halverer nemlig de med den anden parallele Korder, og, naar en Kordes to Stykker ere lige store, maa ogsaa dens Projektions to Stykker blive lige store. Eleven kan forsøge at benytte denne Bemærkning til at løse den følgende Opgave.

120. Man har givet en Ellipses store Axe og det ene Endepunkt af en Diameter. Find ved Konstruktion Endepunkterne af den konjugerede Diameter.

121. Bevis, at en vilkaarlig Linie skærer et Par konjugerede Diametre og Asymptoterne til en Hyperbel i fire harmonisk forbundne Punkter.

122. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet af en Linie gjennem et Brændpunkt, vinkelret paa en Korde, og Kordens Diameter.

123. Bevis, at en vilkaarlig Halvdiameter i en Ellipse

er Mellemproportional mellem de Linier, der forbinde Brændpunkterne med Endepunktet af den konjugerede Diameter.

c) $C = 0$.

57. Herved udtrykkes blot, at det givne Punkt (x_1, y_1) ligger paa Kurven, og Ligningen viser, at i dette Tilfælde er den ene Værdi af r Nul.

d) $A = 0$ og $B = 0$.

58. Ligningen viser, at i dette Tilfælde ere begge Liniens Skæringspunkter med Hyperblen uendelig fjærne. Den første Ligning giver $tg\,u = \pm \frac{b}{a}$, den anden $y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2\,tg\,u}$, altsaa, ved Elimination af u,

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} x_1, \qquad (80)$$

der, da (x_1, y_1) kan være ethvert Punkt i Linien, giver en ny Bestemmelse af Asymptoterne. Der bliver saaledes to Systemer af parallele Linier, der skære Hyperblen i ét uendelig fjærnt Punkt, og i hvert System er der én Linie, hvis andet Skæringspunkt med Kurven ogsaa er uendelig fjærnt.

e) $B = 0$ og $C = 0$.

59. Ligningen giver i dette Tilfælde begge Værdierne af r lig Nul, saa at Linien er en Tangent. $C = 0$ viser, at (x_1, y_1) ligger paa Kurven og altsaa er Tangentens Røringspunkt. $B = 0$ bestemmer Tangentens Retning ved

$$tg\,\varphi = \mp \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \qquad (81)$$

saa at Ligningen for Tangenten bliver

$$y - y_1 = \mp \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1),$$

der kan omskrives til

$$\frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2}$$

eller ved Benyttelse af $C = 0$

$$\frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2} = 1, \qquad (82)$$

der altsaa giver Tangentens Ligning ved Røringspunktets Koordinater.

Da den ene af disse Størrelser kan udtrykkes ved den anden, bliver kun én af dem vilkaarlig; det er imidlertid ofte lettere at benytte en anden Form, hvor Tangenten bestemmes ved sin Retning eller ved Retningen af den derpaa vinkelrette Linie; betegnes dennes Vinkel med Abscisseaxen ved α, har man Tangentens Ligningen under Normalform

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + d = 0,$$

hvor d, Afstanden fra Begyndelsespunktet, skal udtrykkes ved α; man faar nu ved Sammenligning med (82)

$$\frac{\cos \alpha}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\sin \alpha}{\pm \frac{y_1}{b^2}} = \frac{-d}{1}, \qquad (83)$$

der kan skrives

$$\frac{a \cos \alpha}{\frac{x_1}{a}} = \frac{b \sin \alpha}{\pm \frac{y_1}{b}} = -d,$$

hvoraf, idet man kvadrerer de to første Forhold, adderer (subtraherer) Tællerne og Nævnerne og uddrager Kvadratroden,

$$d = \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha}, \qquad (84)$$

saa at Tangentens Ligning bliver

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \pm \sqrt{a^2 \cos^2\alpha \pm b^2 \sin^2\alpha}, \quad (85)$$

hvor de to Fortegn under Rodtegnet svare henholdsvis til Ellipse og Hyperbel, medens de to Fortegn for Rodtegnet vise, at der svarer to Tangenter til et givet α.

Ved Ellipsen ere Tangenterne altid reelle, medens de ved Hyperblen ere imaginære for

$$a^2 \cos^2\alpha < b^2 \sin^2\alpha \text{ eller } \frac{b^2}{a^2} > \cot^2\alpha = tg^2 u.$$

Da nu $tg^2 u = \frac{b^2}{a^2}$ bestemmer Asymptoternes Retninger, udtrykkes herved, at ingen Tangent kan have tg til sin Vinkel med x-Axen numerisk mindre end tg til Asymptoternes Vinkel dermed, altsaa at alle Tangenter maa ligge mere stejlt end Asymptoterne, der selv blive Grænsetangenterne.

Som Anvendelse af (85) ville vi søge det geometriske Sted for Skæringspunkterne af Tangenter, der ere vinkelrette paa hinanden. En Tangent har Ligningen

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha \pm b^2 \sin^2\alpha}.$$

Den derpaa vinkelrette Tangent faas ved at ombytte α med $\frac{\pi}{2} + \alpha$ og bliver

$$-x \sin\alpha + y \cos\alpha = \sqrt{a^2 \sin^2\alpha \pm b^2 \cos^2\alpha}.$$

Mellem disse to Ligninger skal α elimineres; dette sker lettest ved at kvadrere og addere, hvorved man faar Cirklerne

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2.$$

124. Bevis, at i ethvert Keglesnit er Brændstraalen til et Punkt lig det Stykke, som afskæres paa Punktets Ordinat mellem Axen og den Tangent, der rører Kurven i Endepunktet af Ordinaten gjennem Brændpunktet.

125. Til et Punkt i en Ellipse trækkes en Tangent, og fra Centrum fældes en vinkelret paa denne; vis, at det geometriske Sted for Skæringspunktet af denne Linie og Ordinaten til Punktet er en Ellipse; hvilket er det søgte geometriske Sted, naar denne Ellipse behandles paa samme Maade?

126. En Ellipse og en Hyperbel have de samme Brændpunkter (ere konfokale); bevis, at de skære hinanden under rette Vinkler. (Tangenterne i Skæringspunkterne danne rette Vinkler).

60. Af (82) se vi, at de Stykker, som Tangenten afskærer af Axerne, ere henholdsvis

$$\frac{a^2}{x_1} \text{ og } \pm \frac{b^2}{y_1}.$$

Det første Udtryk viser, at Tangenter til Punkter med samme Abscisse paa en Række Ellipser med samme store Axe eller Hyperbler med samme første Axe skære Axen i samme Punkt. Ved Hjælp heraf trækkes en Tangent til et givet Punkt M af en Ellipse. Man trækker nemlig Tangenten til det Punkt af Cirklen over den store Axe som Diameter, der har samme Abscisse som M. Denne Tangent skærer Axen i samme Punkt som den søgte Tangent, der derved er bestemt. Methoden kan ogsaa anvendes ved Hyperblen, naar vi have lært at trække en Tangent til et givet Punkt af en ligesidet Hyperbel; dette skal senere vises.

61. Ligningen for Normalen til Punktet (x_1, y_1) er

$$y - y_1 = \pm \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1). \tag{86}$$

Abscissen til dens Skæringspunkt R med x-Axen findes ved at sætte $y = 0$ og bliver

$$OR = x_1 \pm \frac{b^2}{a^2} x_1 = e^2 x_1, \tag{87}$$

medens vi for Tangentens Skæringspunkt T med Axen fandt

$$OT = \frac{a^2}{x_1}. \tag{88}$$

End videre have vi, idet P er Projektionen paa Axen af Røringspunktet,

$$OP = x_1;\; OF = -ea;\; OF_1 = ea,$$

hvoraf Subtangenten

$$PT = PO + OT = -x_1 + \frac{a^2}{x_1} \tag{89}$$

og Subnormalen

$$PR = PO + OR = -x_1 + e^2x_1 = (e^2 - 1)\,x_1. \tag{90}$$

End videre findes

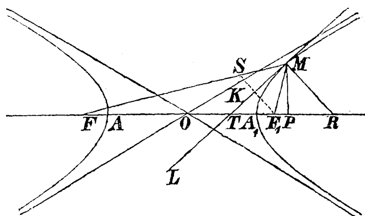
$$FR = FO + OR = ea + e^2x_1 = e\,.\,FM,$$

$$RF_1 = RO + OF_1 = -e^2x_1 + ea = \pm\, e\,.\,F_1M,$$

hvoraf, uden Hensyn til Fortegnet,

$$FR : RF_1 = FM : F_1M,$$

der viser, at Normalen halverer Vinklen mellem Brændstraalerne. Ved Ellipsen ere FM og F_1M, udtrykte ved (65), positive, saa at FR og RF_1 have



samme Fortegn; R ligger da mellem F og F_1, og den Vinkel, der halveres, er den, der indeholder Centrum. Ved Hyperblen ere FM og F_1M, udtrykte ved (71),

positive for den ene Gren og negative for den anden. FR og RF_1 have altsaa forskjellige Fortegn, og følgelig ligger R uden for F og F_1, saa at den Vinkel, der halveres, er den, der ikke indeholder Centrum. Da Tangenten er vinkelret paa Normalen, maa den halvere Nabovinklen til den Vinkel, som Normalen halverer. Dette findes ogsaa ved, paa samme Maade som ovenfor, at søge Stykkerne FT og TF_1.

62. Dersom vi paa en Brændstraale FM afsætte $FS = 2a$, bliver $SM = F_1M$, altsaa Trekanten SMF_1 ligebenet. Da nu Tangenten til M halverer denne Trekants Topvinkel, maa den staa vinkelret paa Midten af Grundlinien SF_1. Betegnes Projektionen af F_1 paa Tangenten ved K, have vi altsaa for alle Stillinger $F_1K = \frac{1}{2} F_1S$, og da nu det geometriske Sted for S er en Cirkel med Centrum i F og Radius $2a$, maa det geometriske Sted for K blive en Cirkel med Centrum i O og Radius a. Vi kunne ved Hjælp af disse Sætninger trække en Tangent fra et givet Punkt L til et Keglesnit. Vi bestemme først S, der ligger i den omtalte Cirkel om F, og som desuden, da L har samme Afstand fra F_1 og fra S, ligger i en Cirkel gjennem F_1 med Centrum i L. Naar S er bestemt, trækkes Tangenten vinkelret paa SF_1. Tangentens Skæringspunkt med FS er Røringspunktet. Man kan ogsaa løse Opgaven ved først at bestemme K, hvis ene geometriske Sted vi kjende, medens det andet er en Cirkel over F_1L som Diameter ($\angle F_1KL = R$).

En Tangent, parallel med en given ret Linie, trækkes let, idet F_1S strax kan tegnes, da den er vinkelret paa den givne Linie.

63. Tangenten fra et givet Punkt (m, n) har først Ligningen

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

og da denne skal tilfredsstilles af det givne Punkt, bliver

$$\frac{mx_1}{a^2} \pm \frac{ny_1}{b^2} = 1;$$

Røringspunkterne for de Tangenter, der kunne trækkes fra Punktet, bestemmes nu ved denne Ligning i Forbindelse med

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

De to Røringspunkter tilfredsstille altsaa begge Ligningen

$$\frac{mx}{a^2} \pm \frac{ny}{b^2} = 1, \tag{91}$$

og da denne er af første Grad, maa den altsaa tilhøre den rette Linie gjennem Røringspunkterne eller Polaren til (m, n).

De Sætninger, der tidligere ere viste at gjælde for Poler og Polarer ved Cirklen, kunne paa samme Maade vises at gjælde om alle Keglesnitslinier.

64. Medens vi for Tangentens Vinkel fik

$$tg\,\varphi = \mp \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

have vi for den Vinkel, som Linien fra Centrum til Røringspunktet danner med Axen,

$$tg\,\psi = \frac{y_1}{x_1},$$

altsaa

$$tg\,\varphi\, tg\,\psi = \mp \frac{b^2}{a^2}.$$

To Korder fra Punktet (x_1, y_1) til den store (første) Axes Endepunkter $(-a, 0)$ og $(a, 0)$ kaldes Supple-

mentkorder. Deres Vinkler μ og ν med Axen bestemmes ved

$$tg\,\mu = \frac{y_1}{x_1 + a};\ tg\,\nu = \frac{y_1}{x_1 - a},$$

altsaa

$$tg\,\mu\,tg\,\nu = \frac{y_1^2}{x_1^2 - a^2} = \mp\frac{b^2}{a^2},$$

saa at vi have

$$tg\,u\,.\,tg\,v = tg\,\varphi\,.\,tg\,\psi = tg\,\mu\,.\,tg\,\nu = \mp\frac{b^2}{a^2}. \qquad (92)$$

Ved Cirklen er $b = a$, saa at Produkterne blive -1, der udtrykker, at de tre Liniepar danne rette Vinkler, som bekjendt fra Geometrien. Ved den ligesidede Hyperbel ere Produkterne $+1$, men af

$$tg\,u\,.\,tg\,v = 1 \text{ følger } tg\,u = cot\,v = tg\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

hvoraf

$$u + v = \frac{\pi}{2} \text{ eller } u + v = \frac{3\pi}{2}.$$

Den første Formel gjælder, naar Vinklerne ere spidse, den sidste, naar de ere stumpe, men i dette Tilfælde ere Nabovinklerne spidse og faa Summen $\frac{\pi}{2}$. Det samme gjælder om de andre Liniepar, saa at de spidse Vinkler, som et saadant Liniepar i en ligesidet Hyperbel danner med Axen, ere Komplementvinkler.

Heraf følger en Konstruktion af Tangenten til et givet Punkt M af en ligesidet Hyperbel. Man trækker OM og oprejser paa den den vinkelrette MN, idet N er Skæringspunktet med Axen. Med M som Centrum slaar man en Bue gjennem N, og til dennes andet Skæringspunkt med Axen trækkes fra M en Linie, der

da er den søgte Tangent. Konstruktionen udvides til en hvilken som helst Hyperbel, idet man først bestemmer det Punkt M_1 i den ligesidede Hyperbel med samme første Axe, der har samme Abscisse som det givne Røringspunkt. Man bestemmer da det Punkt, i hvilket Tangenten til M_1 skærer Axen, og i dette skærer i Følge (88) Tangenten til M ogsaa Axen.

Formlerne (92) vise, at, naar en Linie i et af Linieparrene er parallel med en i et andet Par, ere ogsaa de to andre Linier i de to Par parallele. Naar f. Ex. Linien fra Røringspunktet til Centrum er parallel med en Diameter og med en Korde, saa er Tangenten parallel med den konjugerede Diameter og med Supplementkorden. Heraf kan udledes Konstruktioner af Tangenter, Diametre o. s. v., der kunne anvendes, naar Kurven er tegnet. Vi skulle imidlertid ikke gaa nærmere ind paa saadanne Konstruktioner, der høre til en ganske anden Klasse end de sædvanlige, hvor man kun tør anvende Passer og Lineal.

127. At konstruere en Keglesnitslinie af et Brændpunkt og tre Tangenter.

128. At konstruere en Ellipse af den store Axes Endepunkter og en Tangent.

129. At trække de fælles Tangenter til to Ellipser, der have et fælles Brændpunkt.

130. At bestemme Skæringspunkterne for en ret Linie og en Ellipse eller Hyperbel.

131. At bestemme saa mange Punkter, som man ønsker, af en Hyperbel, naar man kjender Asymptoterne og et Punkt.

132. At bestemme Skæringspunkterne for to Ellipser, der have et Brændpunkt fælles.

133. Til et givet Keglesnit at trække Tangenter, parallele med en given Linie, og bestemme Røringspunkterne.

134. Bevis, at Vinkler, hvis Toppunkter ere diametralt modsatte Punkter af en ligesidet Hyperbel, og hvis Ben gaa gjennem de samme to Punkter af Hyperblen, ere lige store.

135. To kongruente Ellipser ligge med Axerne i hinandens Forlængelse og have det ene Toppunkt fælles; at finde det geometriske Sted for Brændpunkterne, naar den ene Ellipse ruller op ad den anden.

136. I en Ellipse trækkes to vilkaarlige Halvdiametre OA og OB; Tangenten til A skærer OB i b, Tangenten til B skærer OA i a; bevis, at $\triangle OAb = \triangle OBa$.

137. Fra Toppunktet af en Ellipse trækkes en Linie til et vilkaarligt Punkt i Kurven; find det geometriske Sted for Skæringspunktet af en med denne parallel Linie gjennem Centrum og Tangenten til Punktet.

138. Forskjellige Parabler have samme Toppunkt og Axe; fra et fast Punkt i denne trækkes Normaler til dem; find Stedet for disses Endepunkter.

139. Gjennem to vilkaarlige Punkter P og P_1 drages to parallele Linier, der skære et givet Keglesnit henholdsvis i Punkterne R, Q og R_1, Q_1. Bevis at Forholdet

$$\frac{PR \,.\, PQ}{P_1R_1 \,.\, P_1Q_1}$$

er uafhængigt af Parallernes Retning.

140. Fra Centrum i en Ellipse fældes en vinkelret paa Polaren til et Punkt, og fra Punktet trækkes til den store Axe en Linie, der ligeledes er vinkelret paa Polaren; bevis, at Produktet af de to vinkelrette er lig Kvadratet paa den halve lille Axe.

141. To ligedannede, koncentriske Ellipser, hvis Axer falde ud ad hinanden, skæres af en vilkaarlig ret Linie; bevis, at de to Stykker af denne, der afskæres mellem Ellipserne, ere lige store.

142. Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af de Korder i en Ellipse, der gaa gjennem et fast Punkt.

143. I en Trekant ligger Grundlinien fast, og Produktet af Tangenserne til Vinklerne ved denne er konstant; find det geometriske Sted for Toppunktet.

144. En Ellipse og en Hyperbel have de samme Axer; til et Punkt af Hyperblen trækkes en Tangent, og i dennes Skæringspunkter med Ellipsen trækkes Tangenter til denne; find Stedet for disse Tangenters Skæringspunkt.

145. Fra Fodpunktet af en Ordinat i en Hyperbel trækkes en Tangent til den Cirkel, hvis Diameter er Hyperblens første Axe. Find Forholdet mellem Ordinaten og Tangenten.

146. Et Punkt bevæger sig paa en given Ordinat til et Keglesnit; bevis, at Perpendikulæren fra Punktet paa dets Polar skærer Axen i et fast Punkt.

147. En Tangent til en Ellipse skærer Cirklen med Ellipsens store Axe til Diameter i to Punkter, og i disse oprejses vinkelrette paa Tangenten; bevis, at disse vinkelrette skære Axen i faste Punkter.

148. Bevis, at ved en Ellipse er Summen af Kvadraterne af et Par konjugerede Halvdiametre konstant.

149. Ved Ellipsen $2x^2 + y^2 = 9$ søges Længderne af Tangent, Normal, Subtangent og Subnormal til det Punkt, hvis Abscisse er 2.

150. Til et Punkt af en Ellipse trækkes en Normal; søg Produktet af dennes Længde og Afstanden fra Centrum til det samme Punkts Tangent.

151. I en Ellipse trækkes et Par konjugerede Halvdiametre og Korden mellem deres Endepunkter; bevis, at Arealet af den derved dannede Trekant er konstant.

152. Hvilket er det geometriske Sted for Centrum af en

Cirkel, der afskærer givne Korder af to givne rette Linier?

153. Ved en Ellipse eller Hyperbel skæres to faste parallele Tangenter af en bevægelig Tangent; bevis, at Produktet af de to Stykker, som den afskærer af de faste Tangenter, er konstant og lig med Kvadratet af den med dem parallele Halvdiameter.

154. Find Produktet af de Stykker, som afskæres paa en fast Tangent af to vilkaarlige konjugerede Diametre, og vis, at Produktet er lig Kvadratet af den med Tangenten parallele Halvdiameter.

155. Fra et Punkt i en Ellipses lille Axe trækkes en Linie til Brændpunktet og en Normal til Kurven; find Forholdet mellem de to Liniers Længder.

156. Gjennem et vilkaarligt Punkt af et Keglesnit trækkes to paa hinanden vinkelrette Korder; bevis, at den Korde, der forbinder disses Endepunkter, skærer Normalen i et fast Punkt.

157. Bevis, at Produktet af Brændpunkternes Afstande fra en vilkaarlig Tangent er lig Kvadratet af den halve lille Axe.

158. For et Keglesnit søges Relationen mellem en Brændstraale og dens Vinkel med Axen. (Polære Koordinater med Polen i Brændpunktet).

159. Fra Centrum i en Ellipse trækkes en Linie til en Tangent; Linien er parallel med en af Brændstraalerne til Røringspunktet; hvor lang er den?

160. Gjennem Brændpunktet i et Keglesnit trækkes en vilkaarlig Korde; bevis, at den harmoniske Mellemproportional mellem dennes to Stykker er konstant og lig den halve Parameter.

161. Konstruer en Ellipse, naar to konjugerede Halvdiametre ere afsatte.

162. Udtryk Længden af en Korde gjennem Brændpunktet ved Hjælp af Hovedaxen og den med Korden parallele Diameter.

163. Gjennem Brændpunktet trækkes to Korder, parallele med to konjugerede Diametre; bevis, at deres Sum er konstant.

164. Gjennem Brændpunktet trækkes to paa hinanden vinkelrette Korder; bevis, at Summen af deres reciproke Værdier er konstant.

165. Bevis, at Brændpunktets Afstand fra et Punkt i en Hyperbel er lig det Stykke, som en vis fast Linie afskærer af en Linie, der er draget gjennem Punktet, parallel med en af Asymptoterne.

166. En Korde trækkes gjennem et Keglesnits ene Brændpunkt; bevis, at den Linie, der forbinder Skæringspunktet af Tangenterne til dens Endepunkter med Skæringspunktet af de tilsvarende Normaler, gaar gjennem det andet Brændpunkt.

167. Bevis, at den Linie, der forbinder et af et Keglesnits Brændpunkter med to vilkaarlige Tangenters Skæringspunkt, halverer Vinklen mellem Linierne fra Brændpunktet til Røringspunkterne.

168. Bevis, at den Linie, der halverer Vinklen mellem to Tangenter, ogsaa halverer Vinklen mellem de Linier, der forbinde Tangenternes Skæringspunkt med Brændpunkterne.

169. En Cirkel tegnes, som rører en Ellipses store Axe i det ene Brændpunkt, og som gaar gjennem det ene Endepunkt af den lille Axe. Hvor stor er Cirklens Diameter, naar Ellipsens Halvaxer ere a og b?

170. Til et vilkaarligt Punkt af en Ellipse trækkes de to Brændstraaler, og i den af dem og Axen dannede Trekant indskrives en Cirkel med Radius r, medens

den omskrevne Cirkel har Radius R, og f og f_1 ere de to Brændstraaler. Bestem Forholdet $Rr : ff_1$.

171. Fra Endepunkterne af en Korde gjennem en Ellipses ene Brændpunkt trækkes Linier til Ledeliniens Skæringspunkt med Axen; bevis, at Axen halverer Vinklen mellem disse Linier.

172. Fra Endepunkterne af en Diameter i en Ellipse drages Linier til et vilkaarligt Punkt i Kurven; bevis, at de to Punkter, hvori disse Linier skære den konjugerede Diameter, ere harmonisk forbundne med dennes Endepunkter.

173. Paa Korderne gjennem en Ellipses ene Brændpunkt afsættes ud fra dette Punkt den harmoniske Mellemproportional mellem Kordens to Stykker; hvilken Kurve bestemmes derved?

174. Find Ligningen for en ligesidet Hyperbel, naar Asymptoterne tages til Koordinataxer.

175. En Tangent til en Ellipse danner Vinklen φ med den store Axe; find Produktet af denne Axes Endepunkters Afstande fra Tangenten.

176. Bevis, at Normal og Brændstraale staa i samme Relation som Ordinat og Abscisse, naar Toppunktet er Begyndelsespunkt, Axen Abscisseaxe.

177. Fra Brændpunkterne i en Ellipse fældes vinkelrette paa en Tangent, og hvert af Fodpunkterne forbindes med det andet Brændpunkt; bevis, at Forbindelseslinierne skære hinanden paa Normalen til Røringspunktet, og find det geometriske Sted for Skæringspunktet.

178. Naar to faste Punkter af en Hyperbel forbindes med et vilkaarligt Punkt af Kurven, vil Længden af det Stykke, som Forbindelseslinierne afskære af en af Asymptoterne, være konstant.

179. Bevis, at Forholdet mellem de Stykker, som to hvilke

som helst Tangenter til en Parabel afskære paa to faste Tangenter, er konstant.

180. Naar en Linie, parallel med Axen i en Parabel, skærer to Tangenter og Røringskorden, saa er Stykket fra Kurven til den sidste Linie Mellemproportional mellem Stykkerne fra Kurven til Tangenterne.

181. Fra et vilkaarligt Punkt i en Hyperbel trækkes Linier, parallele med Asymptoterne; disse Linier skære en vilkaarlig Halvdiameter OA i Punkterne B og C; bevis, at OA er Mellemproportional mellem OB og OC.

182. Bevis, at det Stykke, som to faste Tangenter til en Parabel afskære paa en vilkaarlig Tangent, ses fra Brændpunktet under en konstant Vinkel.

183. Fra Toppunktet af en Hyperbel trækkes en Linie til et vilkaarligt Punkt af Kurven; find det geometriske Sted for Skæringspunktet af en med denne parallel Linie gjennem Centrum og Tangenten til Punktet.

184. Bevis, at den Trekant, som dannes af to Halvdiametre i en Ellipse og Korden mellem deres Endepunkter er lige stor med den, der fremkommer, naar man ombytter Diametrene med deres konjugerede.

185. Bevis, at enhver Korde i en Hyperbel halverer det Stykke af en af Asymptoterne, der afskæres mellem Tangenterne til Kordens Endepunkter.

186. Inden for Periferien af en given Cirkel gives et fast Punkt. Find det geometriske Sted for Brændpunkterne i de Ellipser, der gaa gjennem dette Punkt og til Axer have Diametre i Cirklen.

187. Bevis, at enhver Cirkel, der har en Brændstraale i en Ellipse til Diameter, rører den Cirkel, hvis Diameter er Ellipsens store Axe.

188. Undersøg om en Halvdiameter i en Hyperbel er Mellemproportional mellem de Linier, der forbinde

Brændpunkterne med Endepunktet af den konjugerede Diameter.

189. Find det geometriske Sted for Toppunktet af en Parabel, der har fast Brændpunkt og gaar gjennem et fast Punkt.

190. I en Ellipses Plan at bestemme en saadan Cirkel, at Længden af en Tangent, trukket fra et vilkaarligt Punkt af Ellipsen til Cirklen, er en rational, hel Funktion af første Grad af Punktets Koordinater; bevis, at Summen af Tangenterne fra et Punkt af Ellipsen til to saadanne Cirkler, der ligge helt inde i Ellipsen, er konstant.

191. M og M_1 ere to Punkter af en Parabel, A Skæringspunktet for Tangenterne til disse Punkter og F Brændpunktet; bevis, at $AM^2 : MF = AM_1{}^2 : M_1F$.

192. Man konstruerer et Parallelogram, hvis ene Diagonal er Korde i en Hyperbel, medens Siderne ere parallele med Asymptoterne; bevis, at den anden Diagonal gaar gjennem Centrum.

193. Bevis, at de Trekanter, hvis ene Vinkelspids er Brændpunktet i en Ellipse, medens de andre ere de Punkter, hvori to faste Tangenter skæres af Cirkler, rørende Ellipsen og med Centrum i den lille Axe, ere ligedannede.

194. At konstruere en Parabel af en Tangent, dens Røringspunkt og Toppunktet.

195. I en given Parabel at trække en Korde, lig og parallel med en given Linie.

196. At konstruere en Ellipse af den store Axes Endepunkter og et Punkt.

197. At konstruere en Keglesnitslinie af to Tangenter, et Punkt og et Brændpunkt.

198. Givet tre Parabler med fælles Brændpunkt; konstruer

en Ellipse med samme Brændpunkt og som rører de tre Parabler.

§ 8. Keglesnit med Toppunktet i Begyndelsespunktet.

65. Dersom vi for Hyperblen flytte Begyndelsespunktet til A_1, maa vi for x indsætte $x + a$. Ligningen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ forandres derved til

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2. \qquad (93)$$

For Ellipsen maa vi derimod, naar vi flytte Begyndelsespunktet til A, sætte $x - a$ for x, hvorved Ligningen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ bliver

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2. \qquad (94)$$

De to Ligninger ere indbefattede i Formen

$$y^2 = px + qx^2, \qquad (95)$$

hvor p er Parametren og

$$q = e^2 - 1 = \mp \frac{p}{2a} = \mp \frac{b^2}{a^2}, \qquad (96)$$

øverste Fortegn for Ellipsen, nederste for Hyperblen. Naar p og q ere givne, bestemmes Keglesnittets Konstanter ved (96). Saaledes giver $p = 2$, $q = -\frac{1}{2}$ en Ellipse, hvor $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $e = \sqrt{\frac{1}{2}}$, medens $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$ giver en Hyperbel, hvor $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $e = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Dersom $q < -1$, faar man e imaginær, men Ligningen (94) viser ogsaa, at man ikke for en Ellipse i den Stilling, vi her betragte, kan have Koefficienten til x^2 mindre end -1, da nemlig $b < a$. Den Ligning, vi gik ud fra, svarer imidlertid for $b > a$ til en Ellipse,

hvis største Axe ligger paa y-Axen, thi en Ombytning af Axerne, det vil sige en Ombytning af x og y, fører os tilbage til den sædvanlige Form. Vi kunne derfor, naar vi betragte Ligningen (94), lade den Indskrænkning, at $a > b$, som vi hidtil have brugt, bortfalde, naar vi blot erindre, at for $a < b$ ligge Brændpunkterne i Ordinataxen, Ellipsen staar paa Højkant. Deraf følger atter, at (95) for $q < -1$, altsaa for $b > a$, svarer til en saadan Ellipse, hvor Begyndelsespunktet er flyttet hen i den lille Axes ene Endepunkt (det til den negative Side). Konstanterne bestemmes da ogsaa i dette Tilfælde ved

$$p = \frac{2b^2}{a}; \quad q = -\frac{b^2}{a^2}, \tag{97}$$

men da b nu er den store Halvaxe, er p ikke her Parametren, der udtrykkes ved $\frac{2a^2}{b}$.

De forskjellige Kurver, som kunne repræsenteres ved Ligningen (95), ere altsaa følgende:

q positiv. Hyperblen; for $q = 1$ haves den ligesidede Hyperbel med Asymptoterne vinkelrette paa hinanden.

q negativ. Ellipsen. $q = -1$ giver Cirklen som Overgangskurve fra Ellipser med $b < a$ (Brændpunkterne paa x-Axen) til Ellipser med $b > a$ (Brændpunkterne paa en Parallel med y-Axen).

$q = 0$ giver Parablen som Overgangskurve mellem Ellipse og Hyperbel; da $q = 0$ giver $e = 1$, $a = \infty$, kan Parablen betragtes som en Ellipse eller Hyperbel, hvis Centrum og ene Toppunkt ligge uendelig fjærnt.

Vi have her forudsat p positiv. p negativ angiver blot, at Kurven vender til den modsatte Side af x-Axen, thi ved at ombytte x med $-x$ (Forandring af Abscisse-

axens positive Retning) faar man den samme Form med p positiv.

66. I de tidligere fundne Formler maa vi foretage de samme Forandringer ved Koordinaterne som ovenfor, naar vi ville anvende Ligning (95) for Keglesnittet.

Vi faa saaledes her Tangentens Retning bestemt ved

$$tg\,\varphi = \mp \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_1 \mp a}{y_1} = \frac{p + 2qx_1}{2y_1}. \qquad (98)$$

67. At bestemme det geometriske Sted for et Punkt M, hvis Afstand fra et givet Punkt F staar i et konstant Forhold til Afstanden fra en given Linie L.

Vi lægge Abscisseaxen gjennem F, vinkelret paa L, som den skærer i P. Vi vælge til Begyndelsespunkt det Punkt O, for hvilket $OF = e\,.\,PO$, idet e er det givne Forhold. Sætte vi nu $PO = g$, faar L Ligningen $x + g = 0$ og F Abscissen eg. Afstanden fra M (x, y) til L er $x + g$, til F $\sqrt{y^2 + (x - eg)^2}$, saa at

$$y^2 + (x - eg)^2 = e^2\,(x + g)^2$$

eller

$$y^2 = 2e\,(e + 1)\,gx + (e^2 - 1)\,x^2$$

er den søgte Ligning. Den viser, at det søgte Sted er et Keglesnit med Excentriciteten e, altsaa en Hyperbel for $e > 1$, en Parabel for $e = 1$ (se 38) og en Ellipse for $e < 1$. Da

$$2e\,(e + 1)\,g = p = \pm\, 2a\,(1 - e^2),$$

bliver $eg = \pm\, a\,(1 - e)$, altsaa F Brændpunktet. L kaldes Ledelinien, og man kan indse, at Ellipse og Hyperbel hver maa have to saadanne paa Grund af deres symmetriske Figur. Man finder let, at Ligningerne for Ledelinierne, naar man tager Centrum til Begyndelsespunkt, blive

$$x = \frac{a}{e} \text{ og } x = -\frac{a}{e}.$$

(91) viser, at Ledelinierne ere Brændpunkternes Polarer.

§ 9. Koordinaternes Ændring. Ligningen af anden Grad.

68. Dersom vi vælge et Koordinatsystem, parallelt med det oprindelige, men med Begyndelsespunkt i et Punkt (a, b), har man for ethvert Punkt

$$x = x_1 + a; \; y = y_1 + b,$$

idet de mærkede Bogstaver betegne Koordinaterne i det ny System. Man behøver da blot at indsætte disse Udtryk i Ligningen for en Kurve for at erholde dens Ligning i det ny System.

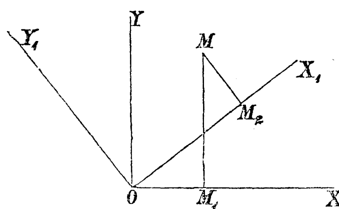
Tænke vi os Koordinatsystemet drejet en vis Vinkel α om Begyndelsespunktet, og betegne vi de ny Axer ved X_1 og Y_1, have vi

$$(XX_1) = (YY_1) = \alpha;$$

$$(XY_1) = (XX_1) + (X_1 Y_1) = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

idet vi beholde den positive Omløbsretning.

Projiceres et Punkt M paa X i M_1, paa X_1 i M_2, faa vi de brudte Linier OM_1M og OM_2M, der maa



have samme Projektion paa en vilkaarlig Linie. Ved at projicere paa X, faa vi da

$$OM_1 \cos(XX) + M_1M \cos(XY)$$
$$= OM_2 \cos(XX_1) + M_2M \cos(XY_1)$$

eller

$$x = x_1 \cos a - y_1 \sin a$$

og paa samme Maade (99)

$$y = x_1 \sin a + y_1 \cos a$$

ved at projicere de brudte Linier paa Y.

Man maa altsaa indsætte de fundne Udtryk i Ligningen for en Kurve for at faa dens Ligning i det ny System. Man ser, at Ligningens Grad ikke kan forandres ved Forskydning eller Drejning af Koordinatsystemet.

Ville vi f. Ex. henføre den ligesidede Hyperbel

$$x^2 - y^2 = a^2$$

til Asymptoterne som Axer, faa vi

$$(x_1 \cos a - y_1 \sin a)^2 - (x_1 \sin a + y_1 \cos a)^2 = a^2$$

eller

$$(x_1^2 - y_1^2)(\cos^2 a - \sin^2 a) - 4x_1 y_1 \sin a \cos a = a^2.$$

Vi kunne nu vælge en af Asymptoterne til x-Axe og en af dens Retninger som positiv, f. Ex. $tg\,(XX_1) = tg\,a = -1$, altsaa $\sin a = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos a = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}$, hvorved den søgte Ligning bliver

$$2x_1 y_1 = a^2,$$

der udtrykker, at det Rektangel, der dannes af Koordinaterne til et vilkaarligt Punkt af Hyperblen og Axerne, har konstant Areal.

69. De tidligere betragtede Kurver ere specielle Tilfælde af Kurver, hvis Ligninger ere af 2den Grad (Kurver af 2den Orden). Vi ville nu undersøge den almindelige Ligning

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (100)$$

Flytte vi Begyndelsespunktet til et Punkt (a, b),

bliver Ligningen, idet vi beholde Betegnelserne x og y,

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2(Aa+Cb+D)x+2(Bb+Ca+E)y$$
$$+Aa^2+Bb^2+2Cab+2Da+2Eb+F=0. \quad (101)$$

Vi kunne nu vælge Punktet (a, b) saaledes at Leddene af første Grad falde bort, saa at Ligningen antager Formen

$$Ax^2+By^2+2Cxy+F_1=0. \quad (102)$$

Vi have da til Bestemmelse af a og b

$$Aa+Cb+D=0;\ Bb+Ca+E=0. \quad (103)$$

Udtrykket for F_1 simplificeres, idet man multiplicerer de to (103) henholdsvis med a og b og subtraherer, hvorved man faar

$$Da+Eb+F-F_1=0,$$

saa at man til Bestemmelse af F_1 faar

$$\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F\text{-}F_1 \end{vmatrix}=0, \quad (104)$$

der er ubrugelig for $AB=C^2$, hvilket Tilfælde senere skal betragtes.

Af (102) se vi, at enhver Korde gjennem Begyndelsespunktet halveres af dette Punkt, idet nemlig et Punkt (x, y) og Punktet $(-x, -y)$ samtidig tilfredstille Ligningen. Et Punkt med denne Egenskab kaldes et Centrum for Kurven.

Vi kunne nu dreje Koordinatsystemet og bestemme den Vinkel, vi have at disponere over, saaledes, at Ligningen faar Formen

$$A_1x_1^2+B_1y_1^2+F_1=0. \quad (105)$$

Er $(XX_1)=\alpha$, altsaa $(X_1X)=-\alpha$, maa vi da have

$$x_1=x\cos\alpha+y\sin\alpha;\ y_1=-x\sin\alpha+y\cos\alpha,$$

som, indsatte i (105), maa føre tilbage til (102). Vi faa deraf

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha, \\ B &= A_1 \sin^2 \alpha + B_1 \cos^2 \alpha, \\ C &= (A_1 - B_1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Ved Addition af de to første faas heraf

$$A_1 + B_1 = A + B, \quad (107)$$

medens man ved Subtraktion og Division i den tredje faar

$$tg\, 2\alpha = \frac{2C}{A - B}, \quad (108)$$

der bestemmer α. Endvidere faa vi

$$AB - C^2 = A_1 B_1, \quad (109)$$

saa at A_1 og B_1 bestemmes som Rødder i Ligningen

$$s^2 - (A + B)\, s + AB - C^2 = 0. \quad (110)$$

Denne Lignings Rødder ere altid reelle, naar A og B ere reelle; de have samme Fortegn for $AB > C^2$, modsatte Fortegn for $AB < C^2$. Kurven er altsaa i første Tilfælde en Ellipse, i andet en Hyperbel, i begge Tilfælde med Axerne faldende i Koordinataxerne.

Ønske vi Begyndelsespunktet lagt i et Toppunkt af Kurven, sætte vi $x_1 + m$ for x_1 og bestemme m saaledes, at

$$A_1\, m^2 + F_1 = 0,$$

hvorved Ligningen bliver

$$A_1\, x_1^2 + B_1\, y_1^2 \pm 2\, x_1 \sqrt{- A_1 F_1} = 0.$$

Størrelsen under Rodtegnet kan her ved Benyttelse af (109) omskrives til

$$\frac{- F_1\, (AB - C^2)}{B_1}.$$

Denne Form kan benyttes i det tidligere udskudte Tilfælde, hvor $AB = C^2$. I (110) er da den ene Rod f. Ex. A_1, Nul. Af (104) faa vi da, idet $(AB - C^2)\, F = 0$,

$$- F_1\, (AB - C^2) = AE^2 + BD^2 - 2\, CDE,$$

hvorved Ligningen bliver

$$B_1^{\frac{3}{2}} y_1^2 = 2x_1 \sqrt{AE^2 + BD^2 - 2CDE}.$$

Vi se heraf, at (101) for $AB = C^2$, det vil sige, naar de to første Led danne et Kvadrat, tilhører en Parabel. Da A og B maa have samme Fortegn, kunne vi altid tænke os dem positive. Vi faa da, idet vi sætte $\sqrt{AB}$ for C og uddrage Kvadratroden, og idet $B_1 = A + B$,

$$(A + B)^{\frac{3}{2}} y_1^2 = 2x_1 (\pm E\sqrt{A} \pm D\sqrt{B}), \qquad (111)$$

hvor de to Led i Parenthesen skulle have samme Fortegn, naar CDE er negativ, men i modsat Fald forskjellige Fortegn.

Som Exempel ville vi tage Ligningen

$$x^2 + y^2 - 4xy + 2x - 4y + 3 = 0.$$

Da $AB < C^2$, er Kurven en Hyperbel. Centrum bestemmes ved (103), der give $a = -1$, $b = 0$. Endvidere faas $F_1 = 2$ og af (110) $A_1 = -1$, $B_1 = 3$ eller omvendt.

Ligningen

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 8y + 1 = 0$$

tilhører en Parabel; ved (111) faas, da CDE er negativ,

$$y^2 = 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, x.$$

§ 10. Keglesnit.

70. Figuren forestiller en ret, cirkulær Kegle, skaaren ved et plant Snit. Papirets Plan indeholder Keglens Axe og er vinkelret paa Snittets Plan, som det skærer i BC. I Keglen er indskrevet to Kugler, der røre Snittets Plan i F og F_1, og som røre Keglen i Cirkler, hvis Diametre ere DE og GH. Lad M være

et Punkt i Keglens Skæringslinie med Planen og Frembringeren gjennem dette Punkt skære Røringscirklerne (og følgelig røre Kuglerne) i K og L. Linier fra M til F og F_1 røre ogsaa Kuglerne, og da to Tangenter fra et Punkt til en Kugle ere lige store, har man

$$FM + F_1M = LM + MK = GD = BC,$$

der viser, at Skæringslinien er en Ellipse med Brændpunkterne F og F_1 og den store Axe BC.

Dersom C laa paa den anden Side af A, vilde Kuglerne falde hver i sit af Keglens to Net, og M vilde falde paa Forlængelsen af LK, saa at LM og MK fik forskjellige Fortegn. I dette Tilfælde vilde altsaa GD være Differensen af Brændstraalerne (regnede positive) og Figuren altsaa en Hyperbel.

Grænsetilfældet bliver i begge Tilfælde det, hvor $BC \parallel AH$. Det ene Brændpunkt falder da uendelig fjærnt. Figuren er en Parabel.*)

Betegne vi Siderne af Trekanten ABC ved a, b og c, have vi set, at a er den store (første Axe). Endvidere er $FF_1 = c \mp b$, altsaa Excentriciteten

$$e = \frac{c \mp b}{a}, \tag{112}$$

*) Her have vi den tidligere antydede Grund til Benævnelsen „Keglesnit."

der viser, at Figuren bliver en Cirkel for $b = c$, altsaa naar Snitplanen er vinkelret paa Keglens Axe. I Almindelighed viser Udtrykket for e, at parallele Planer give ligedannede Snit.

Af de fundne Udtryk faa vi

$$e^2 - 1 = \frac{(c \mp b)^2 - a^2}{a^2}, \text{ men } a^2 = b^2 + c^2 \mp 2bc \cos 2\alpha,$$

idet α er Keglens halve Toppunktsvinkel, altsaa

$$e^2 - 1 = \mp 4 \frac{bc}{a^2} \sin^2 \alpha \text{ og Parametren } p = 4 \frac{bc}{a} \sin^2 \alpha.$$

Vi faa derfor som Keglesnittets Ligning, idet B er Begyndelsespunkt og BC Abscisseaxe,

$$y^2 = 4 \frac{bc}{a} \sin^2 \alpha \,.\, x \mp 4 \frac{bc}{a^2} \sin^2 \alpha \,.\, x^2.$$

Lade vi nu β være den Vinkel, som BC (positiv ind i Keglen) danner med BA, have vi for Ellipsen $B = \beta$, $C = \pi - (2\alpha + \beta)$ og for Hyperblen $B = \pi - \beta$, $C = 2\alpha + \beta - \pi$, altsaa

$$\frac{bc}{a} \sin^2 \alpha = c \,.\, \frac{\sin \beta}{\sin 2\alpha} \sin^2 \alpha = \frac{c \sin \beta \sin \alpha}{2 \cos \alpha};$$

$$\frac{bc}{a^2} \sin^2 \alpha = \pm \frac{\sin \beta \sin (2\alpha + \beta)}{\sin^2 2\alpha} \sin^2 \alpha,$$

hvorved Ligningen bliver

$$y^2 = \frac{\sin \beta}{\cos^2 \alpha} (c \,.\, \sin 2\alpha \,.\, x - \sin (2\alpha + \beta)\, x^2), \qquad (113)$$

der viser, at Snittet er Parabel, Ellipse eller Hyperbel, efter som $2\alpha + \beta \begin{matrix} = \\ < \\ > \end{matrix} \pi$, hvilket stemmer med, hvad vi fandt ovenfor. For $c = 0$ antager Ligningen Formen $y^2 = Ax^2$, der viser, at en Plan gjennem Toppunktet skærer Keglen i to rette Linier; disse ere imaginære, naar A er negativ, altsaa naar Planen er parallel med en Plan, der giver elliptisk Snit. Dersom A er positiv,

bestemmes de to Liniers Retninger ved $tg\, v = \pm \sqrt{A}$, men en dermed parallel Plan skærer i en Hyperbel, hvis Asymptoters Retninger bestemmes ved samme Formel. Vi se heraf, at et System af saadanne parallele Planer skære Keglen i ligedannede Hyperbler, hvis Asymptoter ere parallele med de to rette Linier, i hvilke den af Planerne, der indeholder Toppunktet, skærer Keglen.

Dersom et givet Keglesnit $y^2 = px + qx^2$ skal lægges paa en given Kegle, skulle c og β bestemmes af Ligningerne

$$p = \frac{c \sin\beta \sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}; \quad q = -\frac{\sin\beta \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2\alpha}. \qquad (114)$$

Den sidste bestemmer β, den første derefter c. Man faar $2q \cos^2\alpha = -2 \sin\beta \sin(2\alpha + \beta) = \cos 2(\alpha + \beta) - \cos 2\alpha$, eller, idet

$$\cos 2(\alpha + \beta) = 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1, \; \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\cos^2(\alpha + \beta) = (q + 1)\cos^2\alpha.$$

Heraf findes $\alpha + \beta$. Opgaven er altid mulig, dersom den givne Kurve er en Ellipse $(0 > q > -1)$ eller en Parabel, da højre Side falder mellem 0 og 1. Er Kurven derimod en Hyperbel, maa man have $(q + 1)\cos^2\alpha \leqq 1$, eller, idet $q = tg^2\theta$ (θ den halve Asymptotevinkel), $\cos^2\alpha \leqq \cos^2\theta$.

Man kan altsaa paa en given Kegle kun lægge saadanne Hyperbler, hvor Vinklen mellem Asymptoterne ikke er større end Keglens Toppunktsvinkel.

199. Bring Ligningerne

$$2x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 2y + 1 = 0,$$
$$6x^2 + 4y^2 - xy + 2x - 4y + 3 = 0,$$
$$x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 2y - 1 = 0$$

paa den simple Form ved Ændringer af Koordinatsystemet.

200. Igjennem et Punkt af en cirkulær Kegleflade er der lagt to Planer, vinkelrette paa hinanden og paa den gjennem Axen og Sidelinien til Punktet gaaende Plan. Tages Punktet til Begyndelsespunkt og de to Planers Skæringslinier med den sidste Plan til x-Axer, faa Snitkurverne Ligningerne

$$y^2 = 2x - \frac{1}{2}\sqrt{3} \, . \, x^2 \quad \text{og} \quad y^2 = px + \frac{1}{2}\sqrt{3} \, . \, x^2.$$

Find Keglefladens Toppunktsvinkel, Snittenes Beliggenhed og p.

201. Hvad bliver Ligningen for Parablen $y^2 = px$, naar vi tage Parametrens ene Endepunkt til Begyndelsespunkt og dette Punkts Tangent og Normal til Axer?